

---

---

# METODOLOGIA APLICADA AO CÁLCULO DA DIMENSÃO FRACTAL DE FORMAÇÕES URBANAS UTILIZANDO O ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO MUNICIPAL (IDHM) COMO CRITÉRIO DE SELEÇÃO

---

---

**Paulo Cesar da Costa**

Universidade Presbiteriana Mackenzie (UPM)

## **Resumo**

A geometria fractal provê teorias dimensionais para formas cujas irregularidades não podem ser interpretadas adequadamente pelas definições clássicas euclidianas. Os estudos urbanos apresentam grande potencial para utilizar esses conceitos na análise de fenômenos com comportamento fractal. A dimensão fractal da mancha urbana que se estende no território das cidades é um fator que pode ser considerado nas políticas de planejamento urbano. Propõe-se apresentar uma metodologia para cálculo da dimensão fractal de formações urbanas, usando como exemplo duas cidades em extremos opostos da lista do índice de desenvolvimento humano municipal (IDHM) das capitais estaduais brasileiras, para encontrar possíveis relações ou tendências que subsidiem futuros estudos e planejamentos urbanos.

**Palavras-chave:** Geometria fractal. Políticas de planejamento urbano. Formas urbanas.

---

# 1 INTRODUÇÃO

Segundo o *Relatório sobre a Situação da População Mundial – 2011*, do Fundo de População das Nações Unidas (2011), a quantidade de habitantes do planeta alcançou a marca de 7 bilhões. Desse expressivo número de indivíduos, um terço vive hoje nas cidades e, até 2050, essa proporção será de duas pessoas em cada três.

O aumento da população nas cidades representa um dos principais agentes de transformação das áreas urbanas, contribuindo para a formação de padrões complexos de apropriação do espaço. Entender a dinâmica desse processo é um dos desafios para os estudiosos e pesquisadores que analisam os fenômenos de expansão e tendências de ocupação dos sítios urbanos, com o objetivo, por exemplo, de propor projetos de distribuição de investimentos e desenvolvimento de infraestrutura mais adequados.

Desde que foi desenvolvida pelo matemático B. Mandelbrot, na segunda metade do século passado, a geometria fractal tem apresentado alternativas de análise de formas irregulares e complexas que nem sempre podem ser explicadas pela geometria tradicional euclidiana. Muitos pesquisadores dedicaram-se, então, à produção de trabalhos direcionados ao estudo das cidades utilizando uma abordagem fractal, tais como Batty e Longley (1994), Frankhauser (1998), Benguigui et al. (2000), entre outros, argumentando que a dimensão fractal pode ser um indicador importante para o entendimento da ocupação do espaço territorial das cidades pelas suas manchas urbanas.

Estudos urbanos desenvolvidos por Marques (2005) investigam a dinâmica espacial de áreas urbanas que apresentam comportamento fractal de expansão e retração. A dimensão fractal atua como um dos indicadores do grau de interferência antrópica e apoio para estudos de planejamento urbano. Revela também o padrão de espalhamento pelo qual as formações urbanas evoluem sobre o espaço territorial geográfico e, portanto, “pode ser empregada como subsídio ao planejamento urbano, propondo soluções para expansão mais homogênea do espaço” (MARQUES, 2005, p. 14).

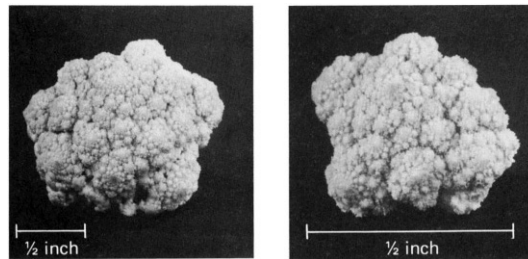
---

## 2 A GEOMETRIA FRACTAL

O termo *fractal* – do latim *fractus*, que significa “quebrado” – foi cunhado por Mandelbrot para identificar uma classe de objetos e formas cujas irregularidades não podem ser interpretadas adequadamente pela geometria euclidiana.

Por que a geometria é constantemente descrita como “fria” e “árida”? Uma razão é por sua inabilidade em descrever as formas de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos e a casca de uma árvore não é lisa, nem mesmo a luz viaja em linha reta. A existência desses padrões nos desafia a estudar essas formas que Euclides deixou de lado como sendo “amorfas”, para investigar a morfologia do “amorfo” (MANDELBROT, 1983, p. 1).

Os fractais possuem características como detalhes infinitos circunscritos em espaços finitos e autossimilaridade. Nuvens, montanhas, plantas (Figura 1) e alguns órgãos de animais são exemplos naturais que revelam estruturas fractais e autossimilaridade estatística ou autoafinidade, isto é, o grau de irregularidade se mantém o mesmo em todas as escalas, mas as “partes menores” não são cópias exatas “do todo”.



**Figura 1** Fractais na natureza. A Couve-flor é um exemplo de autoafinidade. As partes são variações do todo

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

No século XIX e início do século XX, matemáticos como Weierstrass (1872), Cantor (1883), Peano (1891), Von Koch (1904) e Sierpinski (1916), entre outros, desenvolveram estruturas geométricas que contradiziam as definições clássicas euclidianas. Foram consideradas pela comunidade científica da época como “patológicas” ou “monstros matemáticos” e não merecedoras de serem estudadas (CHRISTOFOLLETTI, 2011). Anos mais tarde, na divulgação dos conceitos da geometria fractal, Mandelbrot reconheceu nessas estruturas as propriedades encontradas nos fractais da natureza e destacou que tais propriedades serviram de inspiração para sua descoberta.

O conjunto de Cantor (Figura 2) possui uma regra simples de construção: inicia-se com uma linha reta, seguida por uma sequência de operações de exclusão do terço interior dos segmentos remanescentes. No limite, a estrutura representa um conjunto infinitesimal de pontos desconectados, circunscrito no tamanho finito do segmento de reta original. O conjunto de cantor é um exemplo de autossimilaridade estrita, em que as partes são cópias exatas do todo.



**Figura 2** O conjunto de Cantor

Fonte: Elaborada pelo autor.

O estudo dos fractais proporcionou uma aproximação interdisciplinar entre pesquisadores e profissionais de diversas áreas de conhecimento: matemáticos, físicos, especialistas em computação, biólogos, geólogos, meteorologistas, geógrafos, engenheiros, entre outros, encontraram na geometria fractal uma grande variedade de possibilidades de pesquisas e aplicações, impensáveis até então, em razão de sua capacidade em dimensionar e, com a importante contribuição da computação, gerar imagens complexas e formas similares às reais. Essa mesma habilidade despertou também o interesse das indústrias cinematográfica e de jogos.

Segundo Voss (1988, p. 21), “a geometria fractal de Mandelbrot fornece uma descrição e um modelo matemático para muitas das formas complexas encontradas na natureza”. Assim, os padrões de desenvolvimento dos fractais artificiais concebidos pelo homem – e potencializados pelo emprego da computação – servem de referência ou modelo para entender as formações fractais encontradas em abundância na natureza.

## 2.1 Dimensão fractal

A dimensão topológica euclidiana de um objeto,  $D_T$ , é definida como um valor inteiro que representa o número de coordenadas independentes para definir cada um de seus pontos (BONFIM; DE CASTRO, 2006).

Nos fractais, o cálculo das dimensões permite obter valores fracionados para definir objetos e figuras com características dimensionais que transitam entre as dimensões clássicas ou topológicas: zero para pontos, um para retas e curvas, bidimensional para planos e dimensão três para os sólidos.

A autossimilaridade, apesar de estratégica para o entendimento dos fractais, não é uma exclusividade deles. As figuras euclidianas – retas, quadrados, cubos etc. – também podem ser divididas em cópias menores. A diferença é que estas aceitam fatores de redução de valores arbitrários, já os fractais admitem somente valores característicos (Tabela 1).

TABELA 1

Fatores de redução

Objeto	Nº de cópias	Fator de redução
Reta	3	1/3
	6	1/6
	173	1/173
Quadrado	$9 = 3^2$	1/3
	$36 = 6^2$	1/6
	$29.929 = 173^2$	1/173
Cubo	$27 = 3^3$	1/3
	$216 = 6^3$	1/6
	$5.177.717 = 173^3$	1/173
Conjunto de Cantor	2	1/3
	4	1/9
	$2^k$	$1/3^k$

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

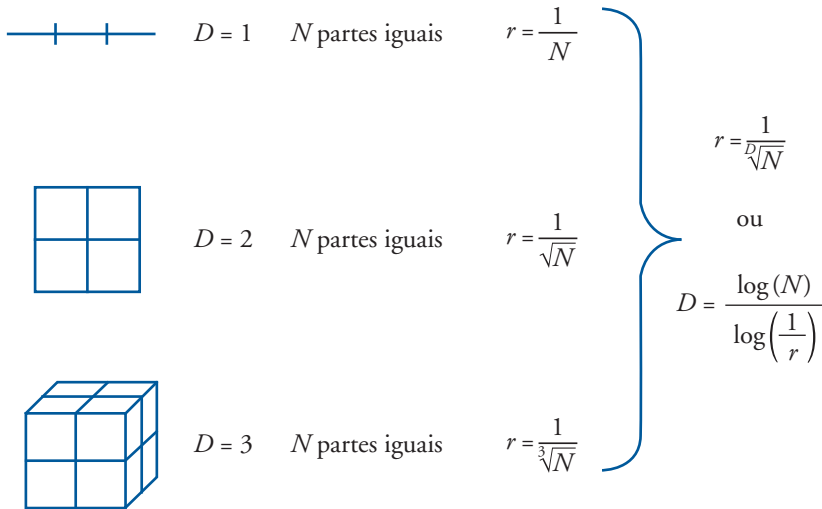
Tomando como referência um objeto unidimensional como um segmento de reta, esse objeto pode ser dividido em  $N$  partes idênticas, reduzidas em uma razão ou fator de escala  $r = \frac{1}{N}$  (Figura 3). Da mesma forma, um objeto bidimensional, por exemplo, a área de um quadrado, divide-se em  $N$  partes iguais, reduzidas por uma razão  $r = \frac{1}{\sqrt{N}}$  e um cubo, de dimensão três, em  $N$  cubos menores reduzidos a  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$ . Assim, um objeto com autossimilaridade de dimensão  $D$  pode ser dividido em  $N$  partes iguais reduzidas a um fator  $r = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$  (VOSS, 1988). Obtém-se, então, a Equação (1).

$$D = \frac{\log(N)}{\log(1/r)} \tag{1}$$

No caso do conjunto de Cantor, conforme já apresentado, a cada etapa de construção, obtém-se dois segmentos de reta idênticos ao anterior, reduzidos a um fator  $r = 1/3$ , o que resulta no seguinte cálculo de dimensão:

$$D = \frac{\log(2)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} \Rightarrow D \approx 0,6309 \tag{2}$$

A dimensão do fractal de Cantor – como um conjunto infinitesimal de pontos desconectados, circunscrito em um trecho de segmento de reta finito – possui um valor que transita entre o zero dimensional e o unidimensional, superior à sua dimensão topológica,  $D_T = 0$ .



**Figura 3** Dimensão por autossimilaridade

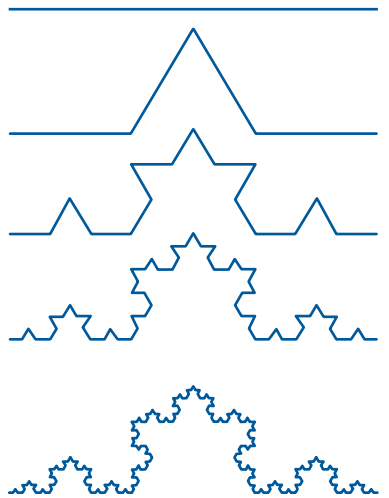
Fonte: Voss (1988).

Os cálculos e os resultados obtidos revelam que nos objetos que apresentam autossimilaridade estrita, fractais ou não, há uma relação de lei de potência entre o fator de redução  $r$  e o número de réplicas obtidas  $N$ , conforme a Equação (3).

$$D = \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \Rightarrow N = \frac{1}{r^D} \Rightarrow N = r^{-D} \quad (3)$$

Essa dimensão  $D$ , portanto, é conhecida como dimensão por autossimilaridade, uma das formas especiais de dimensão fractal e, para as figuras euclidianas, coincide com a dimensão topológica  $D_T$ .

Considerada um dos fractais clássicos, a curva de Koch ganhou o nome de seu idealizador, que a publicou em 1904. Foi uma das principais fontes de inspiração do trabalho de Mandelbrot (1983), frequentemente citado como referência pelos pesquisadores para o entendimento das principais características dos fractais. Em cada estágio de sua construção, o terço interior dos segmentos de reta remanescentes é substituído por dois de mesmo comprimento (Figura 4).



**Figura 4** Construção da Curva de Koch

Fonte: Falconer (2003).

Assim como o conjunto de Cantor, cada um de seus segmentos é similar ao da etapa anterior em um fator de  $1/3$ , refletindo suas irregularidades em todas as escalas. Como boa parte dos fractais, é obtida, de fato, somente no limite de sua construção, que tende ao comprimento infinito, em um processo iterativo de desenvolvimento de suas etapas de construção. “A sequência de curvas poligonais aproxima-se, no limite, à curva de Von Koch [...]. Embora seja razoável chamá-la de curva, ela é muito irregular para apresentar tangentes no sentido clássico” (FALCONER, 2003, p. XX).

Seria, no limite, uma curva formada somente por cantos (GE; LIN; LU, 2007), o que a torna um exemplo de curva não diferenciável ou não derivável, isto é, que não admite uma tangente em nenhum de seus pontos tal qual a função desenvolvida em 1872 por Weierstrass.

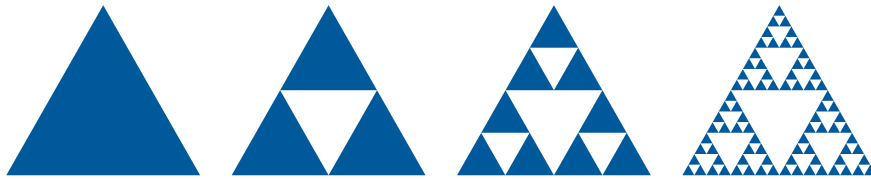
A construção da curva de Koch demonstra que seu comprimento tende ao infinito e cresce na ordem de  $4/3$  por etapa de desenvolvimento. Utilizando a Equação (1), é possível calcular sua dimensão fractal por autossimilaridade:

$$D = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} \Rightarrow D \approx 1,2619 \quad (4)$$

Pode-se concluir que a curva de Koch possui dimensão maior que um segmento de reta ou curva, já que a distância entre os pontos de seu perímetro é infinita, mas

não pode ser considerada de dimensão dois, como um plano euclidiano, portanto, sua dimensão situa-se entre esses dois valores.

A partir de um triângulo equilátero, W. Sierpinski desenvolveu, em 1916, outro fractal clássico, construído pelo processo iterativo de criação de quatro novas réplicas, em um fator de escala  $r = 1/2$ , traçando os vértices dessas cópias a partir do ponto médio de cada lado da figura anterior, removendo posteriormente o triângulo central. Assim, a cada etapa obtêm-se três novos triângulos equiláteros cujo tamanho dos lados é metade do anterior (Figura 5).



**Figura 5** Construção do Triângulo de Sierpinski

Fonte: Falconer (2003).

Cálculo da dimensão por autossimilaridade:

$$D = \frac{\log(3)}{\log\left(\frac{1}{1/2}\right)} \Rightarrow D \approx 1,5850 \quad (5)$$

Tal qual a curva de Koch, a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski excede sua dimensão topológica,  $D_T = 1$ . A diferença entre os valores das dimensões fractais de ambos indica um grau maior de complexidade ou irregularidade para este último.

O conceito de dimensão foi um dos principais temas de discussão durante a chamada “crise da matemática (1875-1925)” e alcançou um de seus momentos agudos com a apresentação do trabalho de G. Peano: uma curva que preenche o espaço de um plano, com dimensão fractal  $D = 2$ . Quando esse valor dimensional é alcançado por uma curva, “ocorre uma profunda mudança qualitativa” (MANDELBROT, 1983, p. 58).

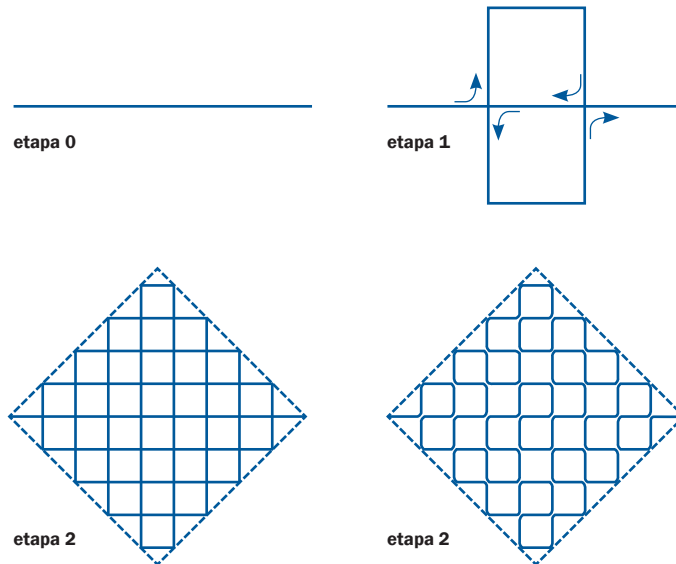
Considerada uma variação da curva de Koch, o ponto de partida para a construção da curva de Peano é um segmento de reta, que, a cada etapa, é substituído por nove outros de tamanho  $\frac{1}{3}$  do anterior, apresentando dois pontos de intersecção (Figura 6).

A segunda etapa de construção revela intuitivamente os contornos de um quadrado, em linhas pontilhadas na Figura 6, cujo plano terá seus pontos preenchidos, no limite, pela curva. Nessa fase, a curva já apresenta 32 pontos que se tocam. Tem-se então que, no  $k$ -ésimo estágio de construção, cada segmento possui  $\frac{1}{3^k}$  do tamanho



do segmento inicial e o tamanho da curva representa  $3^k$  (BONFIM; DE CASTRO, 2006). A dimensão fractal por autossimilaridade:

$$D = \frac{\log(9)}{\log\left(\frac{1}{1/3}\right)} \Rightarrow D = 2 \tag{6}$$



**Figura 6** Curva de Peano

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

O trabalho de Mandelbrot permitiu compreender os fractais como um modelo de arranjo espacial de muitas formas vistas na natureza. Soluções encontradas pelos processos naturais para melhor aproveitamento do espaço. Pode-se associar a estrutura de figuras como a curva de Peano e outros fractais com a organização espacial, por exemplo, dos galhos das árvores ou de alguns órgãos ou sistemas do corpo humano: sistema circulatório, rins, pulmões, entre outros.

O cálculo de dimensão discutido até então mostra-se adequado para as formas euclidianas e fractais estritamente autossimilares. Entretanto, alguns objetos não possuem essa característica e apresentam padrões mais irregulares em suas formas e em seus contornos. Outros métodos permitem calcular a dimensão fractal desses objetos.

### 3 O MÉTODO *BOX-COUNTING*

A dimensão fractal por autossimilaridade estrita é indicada apenas para objetos que apresentem essa característica em sua forma, portanto, ela não é capaz de lidar com figuras com certos padrões de irregularidade ou mesmo com autossimilaridade estatística ou autoafinidade. Estruturas fractais como as da Figura 7 não admitem o mesmo tipo de analogia de divisão de partes idênticas ao todo, reduzidas em determinado fator de escala, utilizada para os fractais clássicos.



**Figura 7** Forma irregular, sem características de autossimilaridade

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

O método *box-counting* propõe uma alternativa para o cálculo da dimensão para essa categoria de objetos, inclusive aglomerados urbanos e linhas costeiras, entretanto, pode também ser utilizado para figuras que possuem autossimilaridade estrita.

Segundo Falconer (2003), o método *box-counting*, também conhecido como *box dimension*, de contagem de quadrados ou células, é um dos mais utilizados em várias ciências pela simplicidade dos cálculos matemáticos envolvidos e a possibilidade de estimativa empírica.

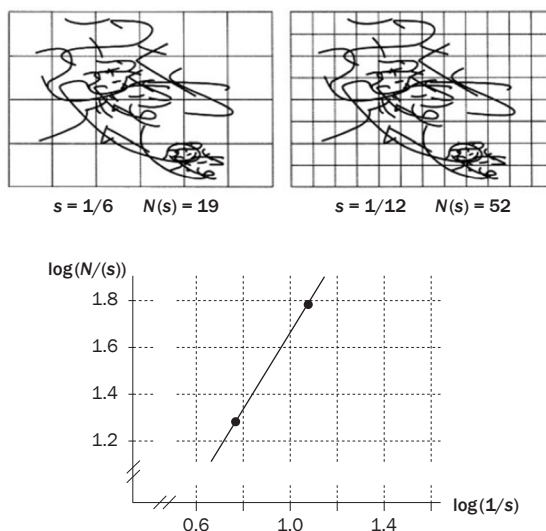
Consiste em acomodar o objeto ou forma a ser analisada em um reticulado ou em uma grade de quadrados com lados de tamanho  $s$  (Figura 8). Por contagem, obtém-se o número de quadrados que possuem intersecção com alguma parte do objeto, representado por  $N(s)$ . Repete-se o procedimento progressivamente para outros reticulados com tamanhos de lado  $s$  menores que o anterior, obtendo-se os novos valores de  $N$  correspondentes. Deve-se então construir um gráfico logarítmico  $\log N(s) \times \log \frac{1}{s}$  e traçar uma reta sobre os pontos obtidos, cuja medida de inclinação indicará a dimensão

*box-counting*  $D_b$ . Sugere-se que o tamanho  $s$  dos lados dos quadrados seja reduzido por um fator de  $\frac{1}{2}$  a cada construção de um novo reticulado. Dessa forma, cada célula será substituída por quatro outras de lado com metade de seu valor, obtendo-se a sequência  $N(2^{-k})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , com o tamanho do primeiro ou menos detalhado reticulado definido por  $s = 2^0 = 1$ . A inclinação da reta sobre os pontos no diagrama logarítmico é uma estimativa da dimensão *box-counting* de um fractal e indica-se pela seguinte fórmula, representada pela Equação (7) (BONFIM; DE CASTRO, 2006):

$$D = \frac{\log N(2^{-(k+1)}) - \log N(2^{-k})}{\log 2^{k+1} - \log 2^k} \tag{7}$$

No caso do exemplo da Figura 8:

$$D_b = \frac{\log 52 - \log 19}{\log 12 - \log 6} \approx 1,45 \tag{8}$$



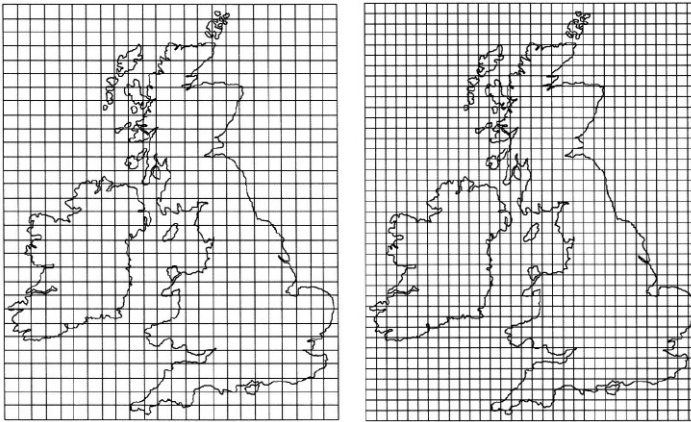
**Figura 8** Método *box-counting*, com forma fractal em dois reticulados. Diagrama logarítmico

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

Um exemplo clássico de utilização do método *box-counting* é o cálculo da dimensão das costas britânica e irlandesa. A Figura 9 apresenta os contornos de suas linhas costeiras circunscritos em duas grades de quadrados, representados por células de

tamanhos  $s = \frac{1}{24}$  e  $s = \frac{1}{32}$  em relação ao reticulado inicial, que representa a grade total, sem subdivisões, de tamanho  $s = 1$ . Nesse exemplo, a contagem apresenta, respectivamente, 194 e 283 quadrados que possuem intersecção com os contornos dos litorais representados. A inclinação da reta que une os dois pontos encontrados no gráfico  $\log N(s) \times \log \frac{1}{s}$ , utilizando a Equação (7), é dada como se segue (BONFIM; DE CASTRO, 2006):

$$D_b = \frac{\log 283 - \log 194}{\log 32 - \log 24} \quad (9)$$



**Figura 9** Linhas costeiras da Grã-Bretanha e Irlanda em dois reticulados – método *box-counting*

Fonte: Peitgen, Jürgens e Saupe (2004).

## 4 MATERIAIS E MÉTODOS

Conforme apresentado na seção 3, o cálculo da dimensão fractal pelo método *box-counting* consiste em acomodar o objeto em reticulados cujo tamanho  $s$  dos lados dos quadrados varie na sequência  $s = 2^{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , partindo de um valor inicial padronizado como  $s = 2^0 = 1$ .

A metodologia proposta foi baseada no trabalho de Ge, Lin e Lu (2007), que sugere o uso de imagens obtidas por sensoriamento remoto para cálculo da dimensão fractal pelo método *box-counting*.

Foram utilizados dois produtos, executando em plataforma Intel, com sistema operacional Microsoft Windows 7:

- ArcGIS 10.1 (ESRI): sistema de informações geográficas (SIG), ferramenta computacional de geoprocessamento para análise e geração de bancos de dados referenciados geograficamente. Além da produção de mapas, o SIG permite representar e analisar fenômenos geográficos, mapas temáticos e imagens digitais em camadas independentes ou combinadas (INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS, 2013).
- MATLAB (MathWorks): plataforma computacional interativa para cálculos numéricos e visualização gráfica. Em especial foi utilizado o pacote utilitário “*boxcount*” (LAM; DE COLA, 2002), que efetua o cálculo da dimensão fractal de imagens por meio do método *box-counting*.

Classificada com IDHM 0,823, a cidade de Curitiba é uma das capitais estaduais que lideram o *ranking* do índice de desenvolvimento humano municipal.

Como base cartográfica, foram utilizadas imagens do satélite Landsat 5 TM, composição colorida RGB-543, conforme figuras 10 e 11, obtidas do banco de imagens do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).



**Figura 10** Imagem do satélite Landsat 5, de 5 mar. 2009, escala 1:500000. Região metropolitana de Curitiba, com destaque dos limites do município

Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (2013). Adaptada pelo autor.

A capital do estado de Alagoas, Maceió (Figura 11), ocupa a última posição na lista do IDHM das 27 capitais brasileiras, apresentando um índice de valor 0,721.



**Figura 11** Imagem do satélite Landsat 5, de 26 ago. 2009, escala 1:500000, com o perímetro municipal da cidade de Maceió em destaque

Fonte: Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (2013). Adaptada pelo autor.

A Tabela 2 apresenta a legenda das faixas do IDHM, segundo o *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil – 2013*.

**TABELA 2**

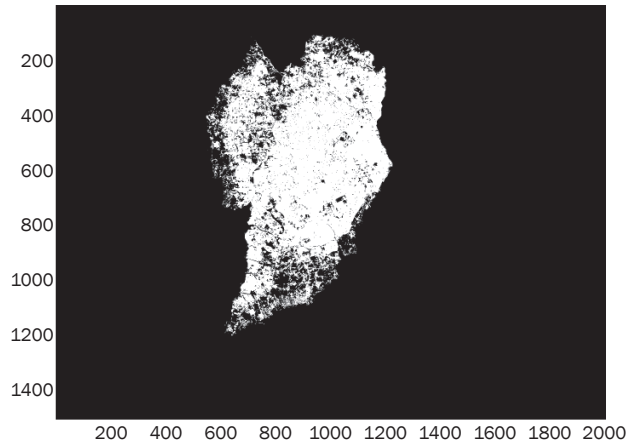
Faixas do IDHM

Faixa do IDHM	Legenda
acima de 0,800	muito alto desenvolvimento humano
0,700 até 0,799	alto desenvolvimento humano
0,600 até 0,699	médio desenvolvimento humano
0,500 até 0,599	baixo desenvolvimento humano
0,000 até 0,499	muito baixo desenvolvimento humano

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segundo Ge, Lin e Lu (2007), inicia-se recortando a mancha urbana do restante da imagem orbital. Esse processo foi executado através da função de classificação supervisionada do *software* ArcGIS. A área urbana obtida foi convertida e armazenada em um arquivo de formato JPEG, utilizado como imagem de entrada (figuras 12 e 13) para o pacote utilitário “*boxcount*” do MATLAB para o cálculo da dimensão fractal pelo método *box-counting*.

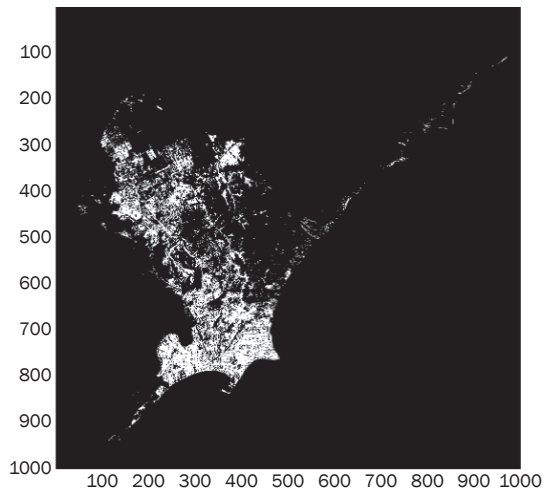
Os reticulados de tamanhos  $s = 2^{-k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  são gerados internamente pelo pacote utilitário “*boxcount*”. O tamanho do primeiro quadrado é baseado na resolução da imagem de entrada em número de *pixels* e alinhado na potência de 2 imediatamente posterior. Por exemplo, se a imagem de entrada apresentar uma resolução de 1500 x 2000 *pixels*, o quadrado inicial  $s = 2^0 = 1$  é gerado com resolução 2048 x 2048. Dessa forma, os quadrados dos reticulados ou das grades posteriores são gerados com tamanho  $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2048}$ , ou seja, até o menor componente da imagem digital.



**Figura 12** Mancha urbana da cidade de Curitiba após classificação supervisionada. Imagem de entrada para o pacote utilitário "boxcount"

Fonte: Elaborada pelo autor.

No caso da capital alagoana, a imagem de entrada possui resolução 1000 x 1000 *pixels* (Figura 13) e o quadrado inicial  $s = 2^0 = 1$  foi gerado com resolução 1024 x 1024. Os quadrados dos reticulados ou das grades posteriores foram gerados, portanto, com tamanho  $s = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1024}$ .



**Figura 13** Mancha urbana da cidade de Maceió após classificação supervisionada. Imagem de entrada para o pacote utilitário "boxcount"

Fonte: Elaborada pelo autor.

O pacote utilitário “*boxcount*” apresenta os pares  $[N(s), s]$  com a notação  $[N(r), r]$ , sendo  $r$  o tamanho em *pixels* dos lados dos quadrados das grades em que a imagem está acomodada e  $N(r)$  o número de quadrados que possuem intersecção com a imagem. Dessa forma, obtêm-se pares  $[N(r), r]$ , conforme tabelas 3 e 4.

TABELA 3

Pares  $[N(r), r]$ , gerados pelo pacote utilitário “*boxcount*”

Dados da cidade de Curitiba.

$N(r)$	$r$
367088	1
102060	2
28132	4
7546	8
1985	16
533	32
154	64
47	128
14	256
5	512
3	1024
1	2048

Fonte: Elaborada pelo autor.

TABELA 4

Pares  $[N(r), r]$ , gerados pelo pacote utilitário “*boxcount*”

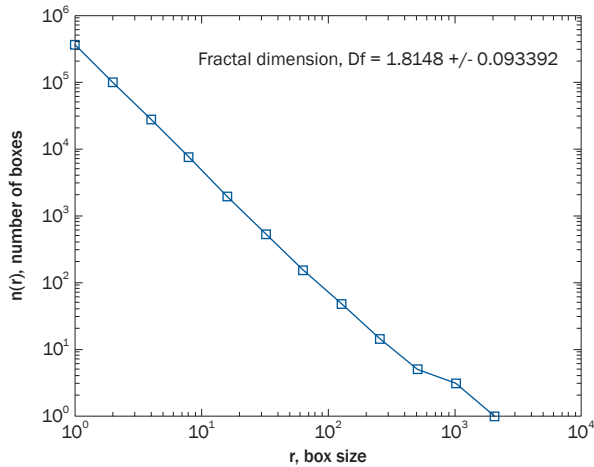
Dados da cidade de Maceió.

$N(r)$	$r$
51126	1
18574	2
6514	4
2162	8
705	16
237	32
81	64
29	128
11	256
4	512
1	1024

Fonte: Elaborada pelo autor.

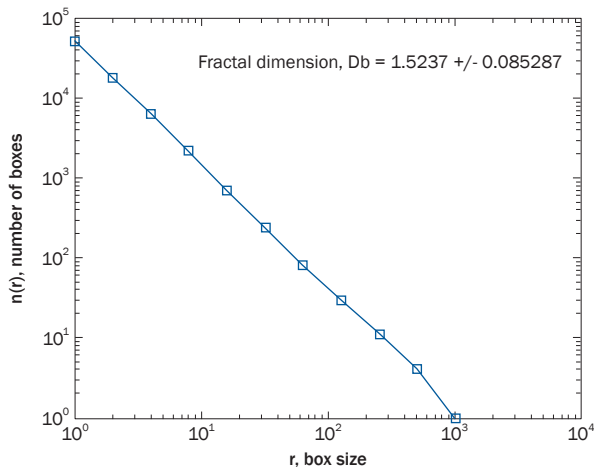


Os pares  $[N(r), r]$  definem os pontos dos gráficos  $\log N(r) \times \log r$  (gráficos 1 e 2) para que sejam traçadas as retas, cujas inclinações indicam a estimativa da dimensão *box-counting* das áreas urbanas das cidades pesquisadas.



**Gráfico 1** Gráfico  $\log N(r) \times \log r$  e valor estimativo da dimensão fractal da área urbana da cidade de Curitiba pelo método *box-counting* (inclinação da reta), gerados pelo pacote utilitário “*boxcount*”

Fonte: Elaborado pelo autor.



**Gráfico 2** Gráfico  $\log N(r) \times \log r$  e valor estimativo da dimensão fractal da área urbana da cidade de Maceió pelo método *box-counting* (inclinação da reta), gerados pelo pacote utilitário “*boxcount*”

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 CONCLUSÃO

O Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano (UNPD) em conjunto com o Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) e a Fundação João Pinheiro (FJP) publicaram o *Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil – 2013*, baseado em dados extraídos do Censo Demográfico de 2010, com a lista do índice de desenvolvimento humano (IDH) das cidades brasileiras, denominado índice de desenvolvimento humano municipal (IDHM).

Os conceitos da geometria de Mandelbrot foram aplicados para efetuar o cálculo da dimensão fractal das formas urbanas de Curitiba e Maceió, que estão classificadas, respectivamente, em quarto e último lugares na lista do IDHM das 27 capitais estaduais brasileiras.

O valor da dimensão fractal da capital paranaense, calculado pelo método *box-counting*,  $D_b \approx 1,81$ , mostrou-se superior ao de Maceió,  $D_b \approx 1,52$ . Adicionalmente, a análise das formas urbanas das cidades pesquisadas reforça a relação entre a dimensão fractal e o padrão de espalhamento das manchas urbanas sobre o espaço territorial dos municípios. A forma urbana de Curitiba revela maior densidade de ocupação da superfície que Maceió (Figura 14).



**Figura 14** Formas urbanas das cidades de Curitiba e Maceió, após classificação supervisionada

Fonte: Elaborada pelo autor.

Vários fatores, físicos ou político-administrativos, podem influenciar a evolução das formações urbanas, tais como obstáculos de relevo acidentado ou de difícil acesso, parques, rios, represas, áreas de proteção ambiental e mananciais, políticas públicas, interesses do mercado imobiliário, entre outros.

Portanto, com base nos resultados obtidos, é possível sugerir a existência de relacionamentos entre o valor da dimensão fractal da forma urbana de uma cidade e os seguintes indicadores: o IDHM e o padrão de espalhamento pelo qual as manchas urbanas correspondentes evoluem sobre o espaço territorial geográfico, podendo servir de subsídio para estudos e projetos de planejamento urbano.

### FRactal Analysis of Urban Forms: Study of Fractal Dimension and Municipal Human Development Index (MHDI)

#### Abstract

Fractal geometry provides theoretical dimensional fundamentals for shapes whose irregularities cannot be properly interpreted by Euclidian classical definitions. Urban studies have great potential for applying these theories as a conceptual reference for analyzing phenomena presenting fractal behaviors. The fractal dimension of the territorial space occupied by cities may be an indicator considered in urban planning policies. It is proposed to present a methodology for calculating the fractal dimension of urban forms, using two cities classified in extreme opposite positions from the Municipal Human Development Index (MHDI) of the Brazilian state capitals as example, to find possible relationships that may support future studies and urban planning.

**Keywords:** Fractal geometry. Urban planning policies. Urban forms.

---

## REFERÊNCIAS

BATTY, M.; LONGLEY, P. *Fractal cities*. London: Academic Press, 1994.

BENGUIGUI, L. et al. When and where is a city fractal? *Environment and Planning B: planning and design*, v. 27, n. 4, p. 507-519, 2000.

BONFIM, D. M.; DE CASTRO, L. Síntese computacional de fenômenos naturais: geometria fractal e vida artificial parte 2: síntese de formas. *Cadernos de História da Ciência*, v. 2, n. 2, p. 77-100, 2006.

CHRISTOFOLETTI, A. L. (2011). Sistemas dinâmicos: as abordagens da teoria do caos e da geometria fractal em geografia. In: VITTE, A. C.; GUERRA, A. J. *Reflexões sobre a geografia física no Brasil*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2011. p. 89-110.

- DE CASTRO, L. *Fundamentals of natural computing*: basic concepts, algorithms, and applications. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2006.
- FALCONER, K. *Fractal geometry – mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley and Sons, 2003.
- FRANKHAUSER, P. The fractal approach. A new tool for the spatial analysis of urban agglomerations. *Population*, v. 10, n. 1, p. 205-240, 1998.
- FUNDO DE POPULAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS – UNFPA. Relatório sobre a Situação da População Mundial 2011. Fundo de População das Nações Unidas. New York, 2011.
- GE, M.; LIN, Q.; LU, W. *Realizing the box-counting method for calculating fractal dimension of urban form based on remote sensing image*. Beijing: Institute of Remote Sensing Applications, 2007.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA – IBGE. Downloads – Geociências. Disponível em: <[http://downloads.ibge.gov.br/downloads\\_geociencias.htm](http://downloads.ibge.gov.br/downloads_geociencias.htm)>. Acesso em: 12 nov. 2013.
- INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS – Inpe. Divisão de Geração de Imagens. Catálogo de Imagens de Satélites. Disponível em: <<http://www.dgi.inpe.br/CDSR/>>. Acesso em: 30 out. 2013.
- LAM, N.; DE COLA, L. *Fractals in Geography*. New Jersey: The Blackburn Press, 2002.
- MANDELBROT, B. *The fractal geometry of nature*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1983.
- MARQUES, M. Metodologias para a estimativa da dimensão fractal do crescimento de aglomerados urbanos – uma contribuição ao estudo da expansão urbana da região metropolitana de São Paulo entre 1905 e 2001. 2005. Tese (Doutorado em Geografia Urbana)–Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.
- PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D. *Chaos and fractals – new frontiers of science*. New York: Springer-Verlag, 2004.
- UNITED NATIONS DEVELOPMENT PROGRAMME. *Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento Humano*. Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil, 2013.
- VOSS, R. F. Fractals in nature: from characterization to simulation. In: PEITGEN, H. O.; SAUPE, D. *The Science of Fractal Images*. New York: Springer-Verlag, 1988. p. 21-29.

**Contato**

Paulo Cesar da Costa  
pccosta.pc@gmail.com

**Tramitação**

Recebido em dezembro de 2013  
Aprovado em maio de 2014