

# MODELOS ORTOGONAIS PARA A ESTIMATIVA MULTIVARIADA DE VAR (VALUE-AT-RISK) PARA RISCO DE MERCADO: UM ESTUDO DE CASO COMPARATIVO

## **João Luiz Chela**

Doutor em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp). Graduado em Matemática Pura pela Unesp. Professor do Centro de Ciências Sociais e Aplicadas da Universidade Presbiteriana Mackenzie (UPM) e superintendente de modelagem de crédito do Banco Safra.  
*E-mail:* chela@mackenzie.br

## **Jean Carlos Abrahão**

*Master in Business Administration* (MBA) pela Carnegie Mellon University (EUA). Graduado em Engenharia Civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP). Superintendente no Banco Itaú-Unibanco.  
*E-mail:* jean.abrahaoh@hotmail.com

## **Luiz Fernando Ohara Kamogawa**

Graduado, mestre e doutor em Economia pela Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz" (Esalq-USP). Professor do Centro de Ciências Sociais e Aplicadas da Universidade Presbiteriana Mackenzie (UPM) e gerente de validação de modelos de risco no Banco Itaú-Unibanco.  
*E-mail:* luiz.kamogawa@itau-unibanco.com.br

## Resumo

O presente trabalho tem como objetivo explorar diferentes modelos de estimativa da distribuição conjunta de fatores para risco de mercado, com ênfase nos modelos ortogonais. Foram explorados cinco modelos: 1. o de correlação condicional dinâmica (DCC); 2. o de ortogonais (ou por componentes principais); 3. o tradicional RiskMetrics EWMA com fator de decaimento 0.94; 4. o com otimização de parâmetros GARCH e correlação EWMA; e 5. o de aproximação para valores extremos. Todos os modelos foram explorados de forma empírica, com o uso de uma série de carteiras previamente selecionada, incluindo dados da ETTJ brasileira durante o período da crise financeira de 2008. Os resultados indicam uso favorável do modelo de componentes principais.

**Palavras-chave:** Componentes principais; GARCH; EWMA.

## 1

## INTRODUÇÃO

A literatura de finanças para a modelagem da volatilidade univariada (único fator de risco) é extremamente densa e desenvolvida, e há um consenso geral das melhores práticas, conveniências e usos de cada modelo.

A fim de aplicar esses modelos para que haja uma distribuição conjunta dos fatores de risco (modelos multivariados), ainda não existe uma metodologia que atenda plenamente os pressupostos metodológicos quantitativos sem ferir também os princípios econômicos, mostrando-se parcimonioso em sua implantação.

Grande parte da literatura compõe-se de generalizações dos procedimentos de modelagem da volatilidade estocástica univariada (em que GARCH e EWMA são exemplos). Tal generalização se torna onerosa e imprecisa à medida que são adicionados novos ativos à carteira.

Existem  $n \cdot (n + 1)/2$  conjuntos de variáveis a serem calculadas para  $n$  número de ativos, o que pode representar, por exemplo, 15 conjuntos a serem

estimados com 5 ativos e 325 com 25 ativos. Adiciona-se a dificuldade de ter de garantir, em cada instante, que a matriz de covariância/variação seja positiva e semidefinida (TSAY, 2005).

Outro ponto negativo no uso da generalização dos modelos univariados consiste no fato de que eles ignoram a presença de estruturas de dependência de longo prazo entre as variáveis, tendo em vista que as variâncias/covariâncias estocásticas e, conseqüentemente, as correlações respondem automaticamente a choques de curto prazo. Concomitantemente, esses modelos também ignoram a presença de correlações espúrias entre as variáveis.

Das diversas sugestões metodológicas para os estimadores da volatilidade multivariada, duas se mostram promissoras: 1. os modelos de correlação condicional, em que se destacam os modelos de correlação constante desenvolvidos por Bollerslev (1990) e o modelo de correlação condicional dinâmica, DCC, de Engle (2002); e 2. os modelos de redução de dimensões ou modelos ortogonais GARCH (O-GARCH) e EWMA (O-EWMA), que são o principal objeto do presente trabalho.

## ■ 1.1 Modelos de correlação condicional

Bollerslev (1990) introduziu uma nova classe de estimadores multivariados de volatilidade, os modelos de correlação condicional constante (CCC), parte da matriz de variância/covariância definida pela Equação (1):

$$H_t = D_t \cdot R \cdot D_t \quad (1)$$

em que:

$H_t$  é a matriz de variância/covariância no período de tempo  $t$ ;

$D_t = \text{diag}[\sqrt{h_{i,t}}]$ , e  $h_{i,t}$  é a variância do ativo  $i$  em  $t$ ;

$R$  é a matriz de correlação constante.

Dado que o resíduo padronizado de uma série de retornos de um ativo é definido pela razão entre o retorno observado e a variância estimada, tem-se a forma matricial expressa por:

$$\varepsilon_t = D_t^{-1} \cdot r_t \quad (2)$$

em que  $r_t$  são os retornos dos ativos em  $t$ .

Assim, Bollerslev (1990) define a matriz de correlação pela simples relação mútua dos resíduos padronizados, de acordo com:

$$E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_t') = D_t^{-1} \cdot H_t \cdot D_t^{-1} = R \quad (3)$$

Engle (2002) propõe uma generalização do modelo constante para um modelo dinâmico (*time varying*), pela ponderação geométrica dos resíduos padronizados definidos no caso do alisamento exponencial EWMA:

$$q_{i,j,t} = (1 - \lambda) \cdot (\varepsilon_{i,t-1} \cdot \varepsilon_{j,t-1}) + \lambda \cdot q = \sum_{s=1}^{\infty} (1 - \lambda) \cdot \lambda^s \cdot \varepsilon_{i,t-s} \cdot \varepsilon_{j,t-s} \quad (4)$$

em que:

$q_{i,j,t}$  é a covariância entre os ativos  $i$  e  $j$  em  $t$ ;

$\lambda$  é o fator de decaimento.

Para a aproximação GARCH (1,1) tem-se<sup>1</sup>:

$$q_{i,j,t} = \bar{\rho}_{i,j} + \alpha \cdot (\varepsilon_{i,t-1} \cdot \varepsilon_{j,t-1} - \bar{\rho}_{i,j}) + \beta \cdot (q_{i,j,t-1} - \bar{\rho}_{i,j}) \quad (5)$$

em que:

$\bar{\rho}_{i,j}$  é a correlação não condicional entre os resíduos padronizados de  $i$  e  $j$ .

Os estimadores de parâmetros da matriz de variância/covariância ocorrem em duas etapas: na primeira etapa, estimam-se individualmente as variâncias dos ativos; na segunda etapa, são estimados os parâmetros únicos da matriz dos elementos de  $q_{i,j,t}$ .

1 Para maiores detalhes, consultar Engle (2002).

Salienta-se que esse processo garante, a cada instante, que a matriz de correlação e dos elementos  $q_{i,j,t}$  seja positiva e semidefinida, tendo em vista que se trata de uma ponderação de uma matriz positiva definida com outra positiva semidefinida.

Resumidamente, as vantagens do modelo de correlação condicional são:

- Do ponto de vista operacional, o número reduzido de conjuntos de variáveis a serem estimados (de  $n \cdot (n + 1)/2$  para  $n + 1$ );
- Do ponto de vista empírico, obtêm-se matriz de correlações mais estáveis e melhor performance, quanto aos *quantis* de frequência das falhas<sup>2</sup>.

## ■ 1.2 Modelos ortogonais

Outra classe de estimadores de modelos de volatilidade multivariada é composta por modelos ortogonais ou modelos de volatilidade por componentes principais, os quais assumem que uma matriz de variância/covariância  $\Sigma_t$  de uma série de retornos multivariados (carteira) pode ser transformada em um conjunto de combinações lineares (componentes) ortogonais entre si.

A análise de componentes principais tem como atribuição explicar a estrutura de  $\Sigma_t$  com o menor número de combinações lineares ortogonais do conjunto total de variáveis, com o objetivo de reduzir o número de dimensões de análise, assim como interpretar os resultados (JOHNSON; WICHERN, 2002).

Dada uma matriz de informação  $\Sigma_t$ , é possível, então, decompô-la em conjuntos de autovalores e autovetores:

$$(\Sigma_t)_{n \times n} = \text{cov}(X_t) = [e_1 \quad \dots \quad e_n] \cdot \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

em que:

$$(X_t)_{T \times n} = \begin{bmatrix} r_{1,t-T} & \dots & r_{n,t-T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{1,t} & \dots & r_{n,t} \end{bmatrix} \text{ é a matriz de retorno dos } n \text{ ativos;}$$

2 Em testes empíricos aplicados por Engle (2002).

$a_i$  é o autovalor  $i$  ( $1 < i < n$ );

$e_i$  é o vetor de autovetores do conjunto  $i$  de autovalores.

Resulta-se no conjunto de combinações lineares definido por<sup>3</sup>:

$$Y_t = e_i' X_t = \begin{bmatrix} Y_{1,t} = e_1' \cdot X_t \\ \vdots \\ Y_{n,t} = e_n' \cdot X_t \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dado que  $\text{VAR}(Y_{i,t}) = e_i' \cdot \Sigma_t \cdot e_i = a_i$  e pela ortogonalidade dos componentes  $\text{cov}(Y_{i,t}, Y_{j,t}) = e_i' \cdot \Sigma_t \cdot e_j = 0$ , tem-se que a soma total dos autovalores é uma representação da variância total da população:  $\text{tr}(\Sigma_t) = \sum_{i=1}^n a_i$ . Dessa forma,

é possível reduzir o posto da matriz de variância/covariância de  $n$  para  $k$ , se essas  $k$  dimensões forem representativas para explicar a variância total populacional (JOHNSON; WICHERN, 2002). Se 80~90%<sup>4</sup> da variância é suficiente, a adição de novas dimensões é encarada como ruído e não traz ganhos de predição do modelo de volatilidade (ALEXANDER, 2008).

3 Centrando os retornos na média zero, tem-se:  $\frac{1}{n-1} \cdot (X_i' X_i) = \Sigma_i$ . Pré-multiplicando a matriz  $\Sigma_i$  pela matriz de autovetores e pós-multiplicando por sua transposta, tem-se:  $\frac{1}{n-1} \cdot E \cdot (X_i' X_i) \cdot E' = A$ , em que:

$$E = [e_1 \quad \dots \quad e_n] \text{ é a matriz de autovetores; e } A = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \text{ a matriz de autovalores.}$$

Definindo  $Y_i = X_i \cdot E'$  como a matriz de componentes principais, define-se:  $\frac{1}{n-1} \cdot (Y_i' \cdot Y_i) = A$ . Dado que

$$E \cdot A \cdot E' = A, \text{ tem-se: } \frac{1}{n-1} \cdot (X_i' X_i) = \frac{1}{n-1} \cdot (Y_i' \cdot Y_i) = \Sigma_i.$$

4 Testes empíricos demonstram que de três a quatro dimensões já são capazes de representar de forma adequada a matriz de variância/covariância (ALEXANDER, 2008).

A matriz de covariância redefinida pelos componentes principais é expressa por:

$$\Sigma_t = \text{cov}(Y_t) = H_t = \text{diag}(h_{1,t}, \dots, h_{n,t}) = \begin{bmatrix} h_{1,t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{1,n,t} = 0 & \dots & h_{n,t} \end{bmatrix} \quad (8)$$

A somatória das volatilidades dos componentes é, conseqüentemente, equivalente à volatilidade dos ativos da carteira. De forma análoga, pode-se, então, definir um processo ponderado para as volatilidades dos componentes, a exemplo dos modelos univariados – como EWMA, Equação (8) e GARCH, Equação (9).

Pela ortogonalidade dos componentes, também é possível tomar um processo otimizado para cada componente sem ferir o princípio da manutenção de uma matriz de variância/covariância positiva semidefinida.

Assim, dada a representatividade dos componentes, é possível reduzir a dimensão de análise de  $n \cdot (n + 1)/2$ , conjunto de variáveis, para  $k$  ( $k < n$ ).

$$\begin{aligned} h_{i,t} &= (1 - \hat{\lambda}_i) \cdot r_{i,t-1}^2 + \hat{\lambda}_i \cdot h_{i,t-1} + \\ &\dots \\ + h_{k,t} &= (1 - \hat{\lambda}_k) \cdot r_{k,t-1}^2 + \hat{\lambda}_k \cdot h_{k,t-1} = \\ &= \text{volatilidade total da carteira} \end{aligned} \quad (9)$$

em que:

$\hat{\lambda}_i$  é o fator de decaimento para o componente  $i$ ;

$r_{i,t-1}^2$  é o retorno do componente  $i$  em  $t-1$ .

$$\begin{aligned} h_{i,t} &= (1 - \hat{\alpha}_i - \hat{\beta}_i) + \hat{\alpha}_i \cdot r_{i,t-1}^2 + \hat{\beta}_i \cdot h_{i,t-1} + \\ &\dots \\ + h_{k,t} &= (1 - \hat{\alpha}_k - \hat{\beta}_k) + \hat{\alpha}_k \cdot r_{k,t-1}^2 + \hat{\beta}_k \cdot h_{k,t-1} = \\ &= \text{volatilidade total da carteira} \end{aligned} \quad (10)$$

Notadamente, a grande virtude dos modelos de volatilidade por componentes principais está na parcimônia que o modelo tem na estimativa de seus parâmetros. Por exemplo, comparativamente aos modelos de correlação condicionada, há uma redução de  $n - k - 1$  dimensões; o que pode representar, supondo  $k = 5$ , em uma carteira com 500<sup>5</sup> ativos, uma redução de 494 dimensões de análise. Comparativamente com a generalização do modelo univariado, isso representa uma redução de 125.245 dimensões.

Outra justificativa para o uso dos modelos ortogonais está na interpretação dos componentes e no argumento econômico da existência de relações de equilíbrio de longo prazo entre os ativos.

Todas as variáveis econômicas, conseqüentemente os ativos, resguardam uma relação de longo prazo entre si. Essas relações não são nada mais que ligações de dependência resultantes de redução de equações de equilíbrio econômico.

Assim, o processo de decomposição da matriz de informação  $\Sigma_t$  tende a encontrar essa estrutura reduzida de equilíbrios, diminuindo de forma significativa a presença de correlações espúrias.

No entanto, uma grande restrição ao uso dos componentes principais é o pressuposto da normalidade multivariada.

Suponha uma distribuição normal multivariada  $N_n(\mu, \Sigma)$  com centroide  $\mu$  e distância euclidiana  $c^2 = (X - \mu)' \cdot \Sigma^{-1} \cdot (X - \mu)$ . Ao decompor-se a matriz de variância/covariância em autovalores e autovetores e, convenientemente, ao assumir  $\mu = 0$ , tem-se:

$$c^2 = X' \cdot \Sigma^{-1} \cdot X = \frac{1}{a_1} \cdot (e_1' \cdot X)^2 + \dots + \frac{1}{a_n} \cdot (e_n' \cdot X)^2 \quad (11)$$

As combinações lineares  $a_1' X, \dots, a_n' X$  são, conforme definido na Equação (6), os componentes principais de  $X$ . Assim, ao supor uma representação bivariada (1 e 2) de um conjunto de  $n$  ativos, existirá uma representação das coordenadas para as dimensões 1 e 2 dos autovetores correspondentes para cada ativo. Ou seja, para cada ativo existirá um autovetor associado ao autovalor 1 e outro ao autovalor 2.

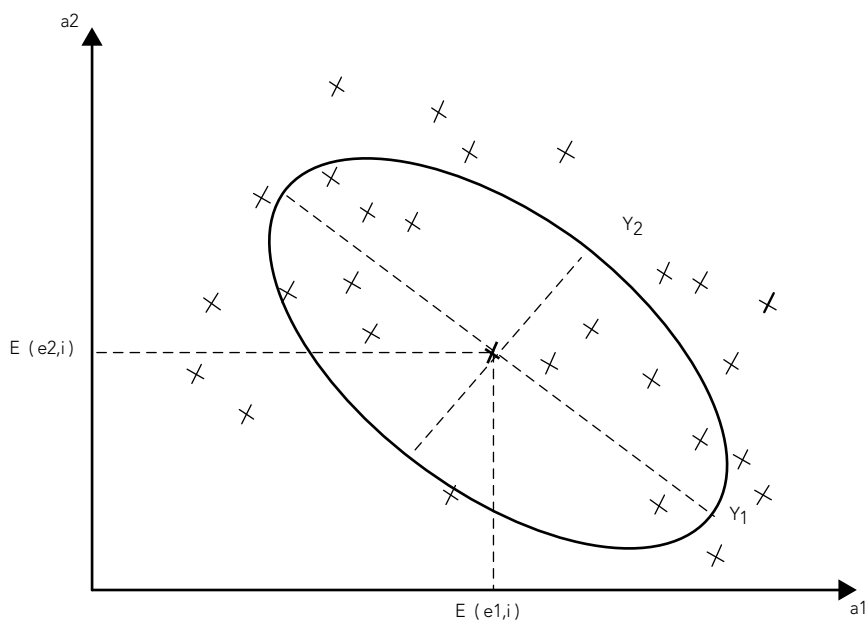
5 Plausível em uma carteira *trading*.



Os componentes principais são a melhor representação ortogonal desse conjunto de autovetores, em que se pressupõe distribuição normal multivariada em torno do centroide, conforme demonstra o gráfico a seguir.

### Gráfico 1

Representação gráfica da decomposição em autovalores e autovetores, sob o ponto de vista dos autovetores 1 e 2, e os componentes principais correspondentes a esses autovetores

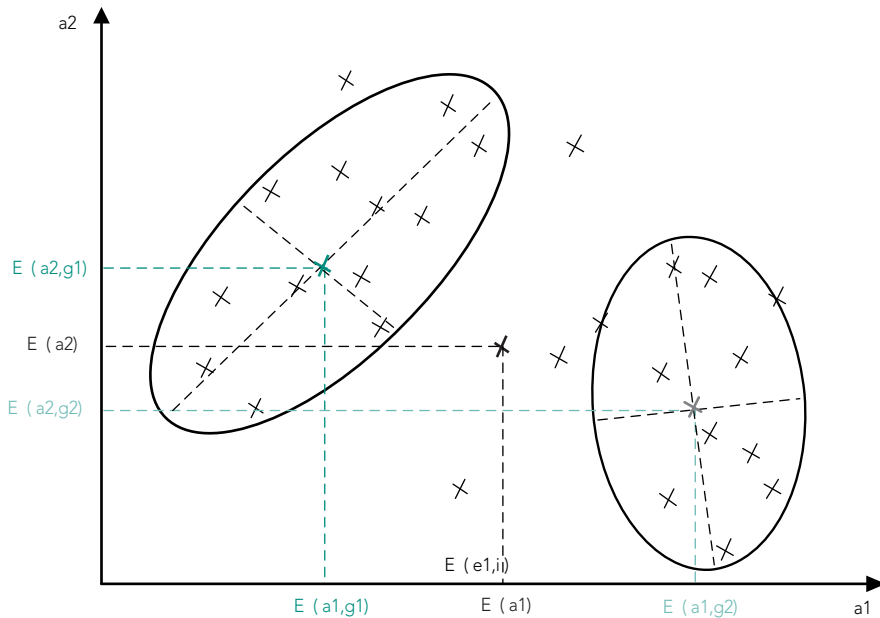


Fonte: Elaborado pelos autores.

A rejeição da normalidade multivariada, no entanto, indica que os elementos dessa decomposição não estão precisamente distribuídos em torno do centroide especificado, o que pode levar a inconsistências na definição dos componentes. Assim, conforme recomendação, seria necessário um processo de pré-agrupamento dos ativos, antes da decomposição em componentes principais (ALEXANDER, 2008), conforme Gráfico 2.

## Gráfico 2

Representação gráfica da decomposição em autovalores e autovetores, sob o ponto de vista dos autovetores 1 e 2, e os efeitos do pré-agrupamento sobre os componentes principais correspondentes a esses autovetores



Fonte: Elaborado pelos autores.

Outro problema recorrente na decomposição em componentes principais consiste na instabilidade dos componentes, a qual indica que, na realidade, não existe relação de equilíbrio de longo prazo definida. Conseqüentemente, não é possível extrapolar o resultado obtido pelos componentes para outros períodos. Alexander (2008), no entanto, atenta para o risco de mudanças nos componentes sobre períodos de estresse de mercado. Outra possibilidade é a existência de relações não lineares entre essas variáveis, fato não captado pelos componentes principais.

Um bom indicador da estabilidade dos componentes é a distância estatística euclidiana (distância ao quadrado entre os vetores e seu centroide ponderado pela variância/covariância), tendo em vista que é uma boa demonstração da estrutura dos componentes.

## 2

### OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivos:

1. Verificar o poder de redução de dimensões do método de componentes principais.
2. Testar a estabilidade dos componentes.
3. Fazer uma análise comparativa da qualidade dos modelos:
  - a. VAR EWMA .94;
  - b. VAR DCC;
  - c. VAR ortogonal EWMA .94;
  - d. VAR ortogonal EWMA otimizado;
  - e. VAR ortogonal GARCH otimizado;
  - f. Uma aproximação para a distribuição dos valores extremos.

Foram testados dois conjuntos de carteiras:

- o primeiro para testar a estabilidade dos componentes, com mais ativos (15) e com maior série de tempo (1.008 dias úteis);
- o segundo para realizar o estudo comparativo, com três carteiras – uma concentrada em juros pré e cupom; outra diversificada em índices, juros e moedas; e uma terceira de comportamento atípico (altíssima volatilidade), com 12 ativos e 645 dias úteis.

O poder de redução foi demonstrado em ambos os estudos. Os testes e as metodologias utilizadas, além da descrição das carteiras, estão indicados na seção a seguir.

## 3

### METODOLOGIA

#### 3.1 Poder de redução e estabilidade dos componentes

Para testar a estabilidade dos componentes, foram consideradas 41 amostras de 200 dias, espaçadas em intervalos de 21 dias, de uma carteira com-

posta por quatro vértices da estrutura a termo da taxa de juros (ETTJ) do mercado interbancário brasileiro: 1M, 6M, 1Y e 2Y (obtidos da curva de *swaps* pré x DI da BM&F e providos pela Bloomberg); quatro vértices da curva de cupom cambial da BM&F: 1M, 6M, 1Y e 2Y (providos pela Bloomberg); três preços *spot* de moedas: BRL, EUR e JPY (providos pelo Bloomberg); e quatro índices de composições de bolsas de valores: IBOV, SPX, NKY e DAX (providos pelo Bloomberg). Todas as séries iniciaram em 21 de junho de 2005 e finalizaram em 10 outubro de 2008. Foram excluídos os dias não úteis em todos os mercados, e o resultado foi um remanescente de 1.008 dias de análise.

Dessas 41 amostras, foram tomadas as taxas dos log retornos dos preços<sup>6</sup>; desses log retornos, foram tomadas suas matrizes de correlação; e dessas matrizes de correlação por sua vez, foram extraídos 41 conjuntos de componentes principais.

Após realizadas as operações descritas anteriormente, desses 41 conjuntos de componentes foram tomados os dois principais componentes, bem como foi realizado um estudo da variação histórica dos pesos desses dois principais componentes. O critério de avaliação foi a análise gráfica (forma) e a distância euclidiana multivariada (distância estatística normalizada do componente ao centroide). Maiores detalhes podem ser encontrados em Johnson e Wichern (2002).

O poder de redução foi testado pela média das inércias dos dois primeiros componentes obtidos.

## ■ 3.2 Estudo comparativo

O estudo comparativo foi realizado considerando três diferentes carteiras:

- *Carteira A*: seis vértices da taxa prefixada e cupom cambial (1M, 2M, 3M, 6M, 1Y e 2Y) convertidos em preços unitários cupom zero.
- *Carteira B*: moedas BRL, EUR e JPY; índices de bolsas IBOV, SPX, NKY e DAX; *commodities*<sup>7</sup> de aço, ouro e petróleo NY; juros pré e cupom de um ano.

6 Para o caso da ETTJ da curva prefixada e do cupom cambial, as taxas foram convertidas em preços unitários cupom zero (compostos para 252 dias úteis, no caso da taxa prefixada, e linear 360 para o caso do cupom cambial).

7 No caso das *commodities*, foram tomados os valores do primeiro vencimento de futuro (*near by*).

• *Carteira C:*

- Grupo 1 – ações Citigroup, Lehman Brothers, Goldman Sachs, Merrill Lynch, Aracruz Celulose e Papel, Sadia e Petróleo NY.
- Grupo 2 – CDS Brasil, CDS Chile, CDS IBM, CDS Argentina, CDS Lehman Brothers, todos de cinco anos.

A fonte de todas as carteiras foi o Bloomberg, entre os dias 23 de fevereiro de 2006 e 26 de novembro de 2008. Dessas amostras, foram tomadas as taxas dos log retornos, e dos log retornos foram desenvolvidos os modelos de volatilidade. Em todas as carteiras, para cada ativo foi estipulado um valor marcado a mercado (MtM) inicial de R\$ 10.000 (dez mil reais), com seus valores marcados diariamente a mercado.

Dois cenários foram considerados: um assumindo uma posição comprada e outro, vendida. No caso da carteira C, os cenários foram: 1. Posição comprada do grupo 1 e vendida para o grupo 2; 2. Posição vendida para o grupo 1 e comprada do grupo 2. O valor de VAR foi padronizado em 99%.

Os critérios de avaliação dos modelos foram:

- *Teste de Kupiec* – mede a eficiência da proteção;
- *Pior perda relativa* – número do pior retorno em valores de volatilidade – mede a proteção no pior cenário.
- *VAR médio* (em R\$) – mede o custo da proteção.

### 3.2.1 *Teste de Kupiec (1995)*

O teste de Kupiec avalia as propriedades assintóticas da proporção de falhas no intervalo de confiança da distribuição normal do modelo de VAR especificado. Testa-se pelo log da razão de verossimilhança entre a proporção de falhas observada e o intervalo de confiança do modelo de VAR; ver Equação (12):

$$LR_{Kupiec} = \log \left[ \frac{\left( \frac{(1-x/n)^{n-x} \cdot (x/n)^x}{(1-p^*)^{n-x} \cdot (p^*)^x} \right)^2}{(1-p^*)^{n-x} \cdot (p^*)^x} \right] \sim \chi_1^2(\alpha) \quad (12)$$

em que:

$x$  é o número de falhas;

$n$  é o período;

$p^*$  é o intervalo de confiança do modelo de VAR;

$\alpha$  é o intervalo de confiança de teste.

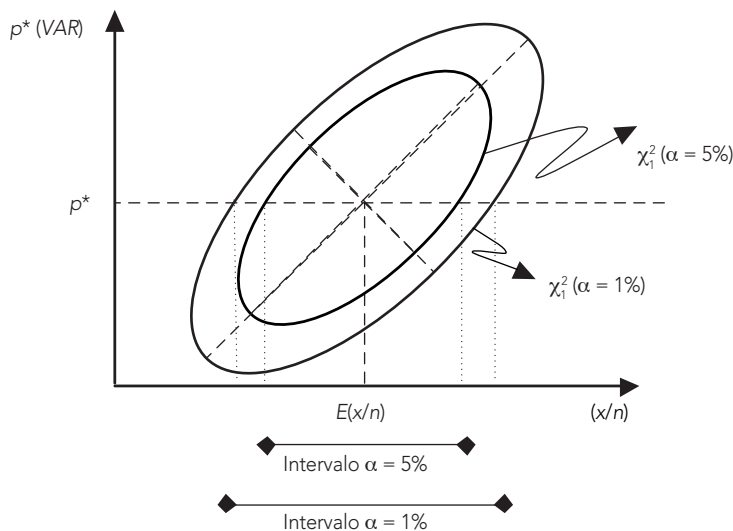
Pelas propriedades assintóticas da proporção das falhas, a razão  $x/n$  (proporção observada das falhas) deve, em grandes amostras, tender ao intervalo de confiança de VAR, que é a proporção de falhas da distribuição especificada pelo modelo de VAR  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \cong p^* \right)$ . Dessa forma, a log razão de Kupiec, em grandes amostras, tende a zero e tem uma distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade.

A hipótese nula do teste (considerando o modelo de VAR especificado) está em encontrar valores do teste de Kupiec superiores à estatística qui-quadrado sob um intervalo de confiança especificado ou encontrar valores de falhas superiores ao intervalo de falhas permitidas ao intervalo de VAR especificado, para determinada amostra e determinado valor de intervalo de confiança de teste.

Conforme mostra graficamente no Gráfico 3, a razão de verossimilhança de Kupiec é demonstrada por uma elipse com centroide definido pelo intervalo de VAR especificado ( $p^*$ ) e a esperança da proporção de falhas empírica. As faixas dos valores limites de falhas da hipótese nula (valores para aceitar-se um bom modelo) são dadas pelas bordas dessa elipse – a qual, por sua vez, é definida pelo intervalo de confiança da estatística qui-quadrado especificado no teste. Assim, quanto maior o intervalo de confiança, menor a área de cobertura da estatística e menor o intervalo de possibilidade de falhas. No limite ( $\alpha = 100\%$ ), o intervalo de falhas é o próprio valor do VAR.

### Gráfico 3

#### Demonstração gráfica do teste de Kupiec



Fonte: Elaborado pelos autores.

### 3.2.2 EWMA .94

Para o caso do estudo aplicado nas carteiras selecionadas com uso do modelo EWMA .94, a série foi dividida em duas amostras.

A primeira delas – de 100 dias, entre 23 de fevereiro de 2006 e 27 de julho de 2006 – foi chamada de amostra de aprendizado. Nela foi tomada a série de partida de estimativa das variâncias e covariâncias com ajuste exponencial.

A segunda amostra – de 540 dias, entre os dias 28 de julho de 2006 e 26 de novembro de 2008 – foi chamada de amostra de validação. Nela foram testados as frequências de falhas (Kupiec), a pior perda e o VAR médio para as três carteiras selecionadas nos dois cenários (posições comprada e vendida).

### 3.2.3 VAR DCC

A amostra para o modelo de VAR DCC também foi dividida em duas.

A primeira – também de 100 dias, entre 23 de fevereiro de 2006 e 27 de julho de 2006 – foi chamada novamente de aprendizagem; nela também foi tomada a série de partida de estimativa das variâncias e covariâncias com ajuste exponen-

cial EWMA nos retornos marginais. Nesse caso, no entanto, o fator de decaimento foi otimizado para cada ativo. O processo de otimização utilizado foi a maximização da verossimilhança da somatória dos retornos padronizados à normal.

A segunda parte da amostra – de 540 dias, entre 28 de julho de 2006 e 26 de novembro de 2008 – foi utilizada para continuar o processo de estimativa das volatilidades estocásticas para cada ativo, considerando o fator de decaimento da amostra de aprendizado para serem estimadas as covariâncias, as quais foram tomadas a partir das marginais, com uso da Equação (4).

Os pesos do alisamento exponencial da DCC foram obtidos pela maximização da função de verossimilhança dos retornos padronizados à normal, dentro dessa amostra.

Desse resultado foram testados as frequências de falhas (Kupiec), a pior perda e o VAR médio para as três carteiras selecionadas nos dois cenários (posições comprada e vendida).

### 3.2.4 VAR O-EWMA .94

A amostra para o modelo de VAR O-EWMA .94 foi dividida em duas novamente.

A primeira – de 100 dias, entre 23 de fevereiro de 2006 e 27 de julho de 2006 – foi chamada novamente de aprendizagem, tendo sido o local onde foram obtidos os componentes principais a partir da matriz de correlação histórica, nesses 100 dias. Desses componentes foram tomadas as dimensões que aproximassem 90% da inércia total, conforme recomendado por Alexander (2008).

A segunda parte da amostra – de 540 dias, entre 28 de julho de 2006 e 26 de novembro de 2008 – foi utilizada para serem estimadas as volatilidades estocásticas para cada componente. O ponto inicial foi a volatilidade estimada nos 100 dias da amostra de aprendizagem, e o fator de decaimento foi .94 pelo modelo EWMA.

A partir dos componentes obtidos, foram estimados os valores marcados a mercado para cada componente selecionado.

A multiplicação das volatilidades estimadas, o valor marcado a mercado em cada componente e o percentil da normal selecionado definem o valor de VAR em cada componente. Dada a ortogonalidade dos componentes, o VAR da carteira é a somatória do VAR nesses componentes.

Desse resultado foram testadas as frequências de falhas (Kupiec), a pior perda e o VAR médio para as três carteiras selecionadas nos dois cenários (posições comprada e vendida).



### 3.2.5 VAR O-EMWA otimizado

A primeira amostra de aprendizado – de 100 dias, entre 23 de fevereiro de 2006 e 27 de julho de 2006 – foi utilizada para a obtenção dos componentes principais a partir da matriz de correlação histórica, nesses 100 dias. Desses componentes foram tomadas as dimensões que aproximassem 90% da inércia total, conforme recomendado por Alexander (2008).

A partir desses componentes selecionados, foi obtido o fator de decaimento ótimo, assumindo uma função de volatilidade estocástica EWMA. O processo de otimização utilizado foi a maximização da verossimilhança da somatória dos retornos padronizados à normal dentro dessa amostra de 100 dias.

A segunda parte da amostra – de 540 dias, entre 28 de julho de 2006 e 26 de novembro de 2008 – foi utilizada para serem estimadas as volatilidades estocásticas para cada componente. O ponto inicial foi a volatilidade estimada nos 100 dias da amostra de aprendizagem, e o fator de decaimento utilizado foi o ótimo obtido na amostra de aprendizado.

A partir dos componentes obtidos, foram estimados os valores marcados a mercado para cada componente selecionado.

A multiplicação das volatilidades estimadas, o valor marcado a mercado em cada componente e o percentil da normal selecionado definem o valor de VAR em cada componente. Dada a ortogonalidade dos componentes, o VAR da carteira é a somatória do VAR nesses componentes.

Desse resultado foram testadas as frequências de falhas (Kupiec), a pior perda e o VAR médio para as três carteiras selecionadas nos dois cenários (posições comprada e vendida).

### 3.2.6 VAR O-GARCH otimizado

O procedimento adotado no modelo O-GARCH otimizado foi semelhante ao processo adotado no O-EWMA otimizado, com a diferença da função da volatilidade estocástica. Nesse caso, foi adotada uma função GARCH.

### 3.2.7 VAR valores extremos

O procedimento adotado para obter a distribuição dos valores extremos foi o da divisão do resultado das carteiras em uma amostra de 100 dias de resultados e a apuração do pior e do melhor resultado. A partir disso, em uma janela móvel de 250 dias foi tomado o percentil dessa distribuição de dados.

## 4

# RESULTADOS

### ■ 4.1 Poder de redução e estabilidade dos componentes

A carteira testada indicou que cinco componentes correspondem entre 92~95% da inércia total da carteira e com baixa variabilidade de sua representação.

No quesito estabilidade, observa-se relativa estabilidade. Conforme ilustra o Gráfico 4 a seguir, a distância estatística euclidiana dos dois primeiros componentes teve variância de apenas 0,215%.

**Gráfico 4**

**Distância estatística euclidiana em torno do centroide dos dois primeiros componentes**



Fonte: Elaborado pelos autores.

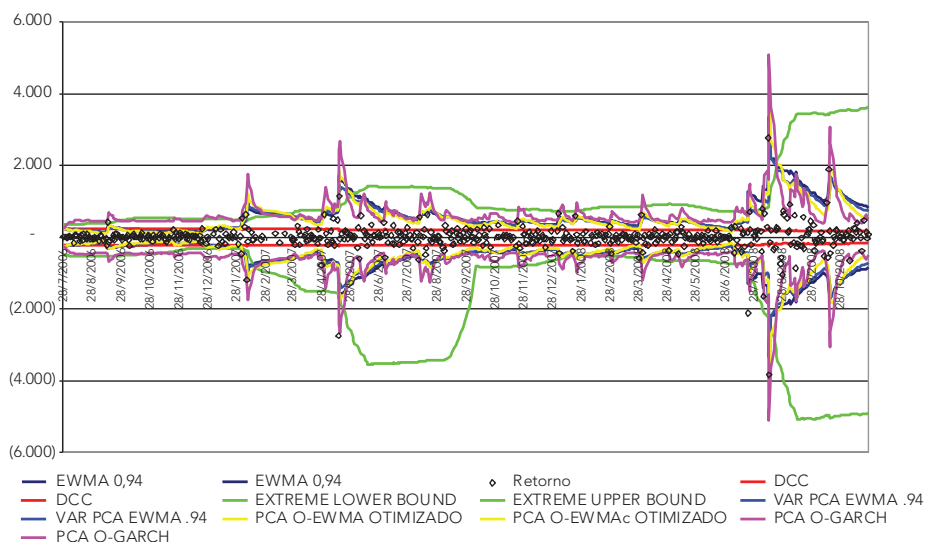
### ■ 4.2 Carteira A

Para a carteira A, os únicos modelos capazes de controlar erro pela frequência de falhas foram O-GARCH e por valores extremos. Entretanto, o VAR por valores extremos foi o de maior custo. O VAR DCC foi o de menor custo; todavia, foi o de pior controle de risco em frequência e o de pior controle da pior perda.

O VAR EWMA, apesar de falhar na frequência, controlou bem a pior perda e o custo dentro da média. O VAR O-GARCH também controlou bem a pior perda, e o custo ficou dentro da média dos demais modelos.

**Gráfico 5**

**Backtest da carteira A e VAR 99% por modelo**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 1**

**Resultado backtest da carteira A**

Modelo	Falhas VAR 99%		Kupiec 5%		VAR médio 99%	Perda máxima (vezes VAR)	
	Vendido	Comprado	Vendido	Comprado		Vendido	Comprado
EWMA	2,39%	2,20%	Falho	Falho	613,53	3,18	-3,83
DCC	12,29%	10,46%	Falho	Falho	212,31	31,73	-33,39
O-EWMA	2,75%	3,49%	Falho	Falho	554,48	6,22	-7,59
O-GARCH	1,10%	1,47%	OK	OK	686,37	4,04	-5,51
O-EWMA .94	2,75%	3,30%	Falho	Falho	567,10	6,24	-8,76
EXTREME	1,10%	1,10%	OK	OK	1.138,90	7,27	-4,04

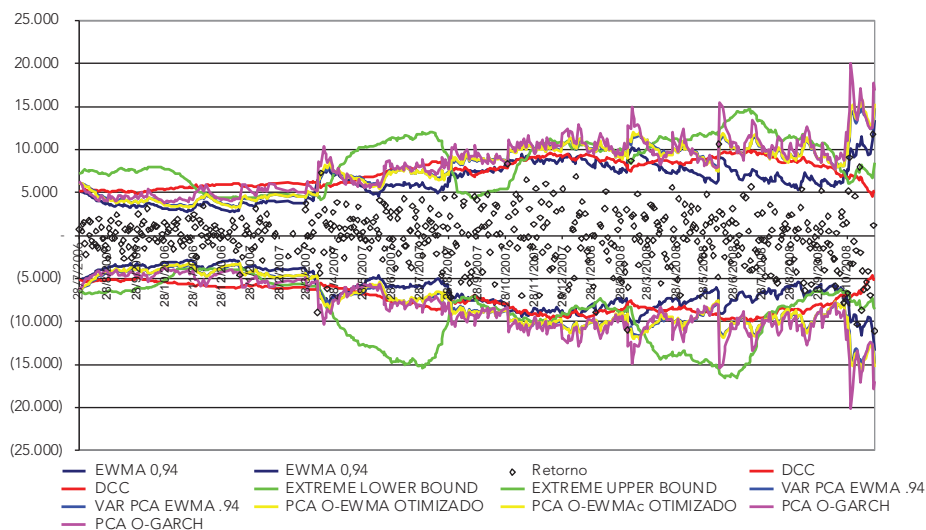
Fonte: Elaborada pelos autores.

### ■ 4.3 Carteira B

Na presente carteira, todos os modelos controlaram bem o risco em sua frequência. O VAR EWMA foi o de menor custo e melhor controle da pior perda. O VAR por valores extremos foi o de maior custo, seguido pelo O-GARCH. O VAR DCC foi o de pior controle da pior perda, seguido pelo de valores extremos.

**Gráfico 6**

**Backtest da carteira B e VAR 99% por modelo**



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 2**

**Resultado *backtest* da carteira B**

Modelo	Falhas VAR 99%		Kupiec 5%		VAR médio 99%	Perda máxima (vezes VAR)	
	Vendido	Comprado	Vendido	Comprado		Vendido	Comprado
EWMA	0,55%	0,73%	OK	OK	6.354,66	2,87	-3,23
DCC	1,28%	1,83%	OK	OK	7.470,12	5,98	-5,01
O-EWMA	0,37%	0,55%	OK	OK	7.933,99	2,97	-4,47
O-GARCH	0,37%	0,55%	OK	OK	8.462,28	2,62	-3,98
O-EWMA .94	0,37%	0,55%	OK	OK	7.937,85	2,91	-4,49
EXTREME	1,65%	1,28%	OK	OK	8.945,74	3,56	-3,79

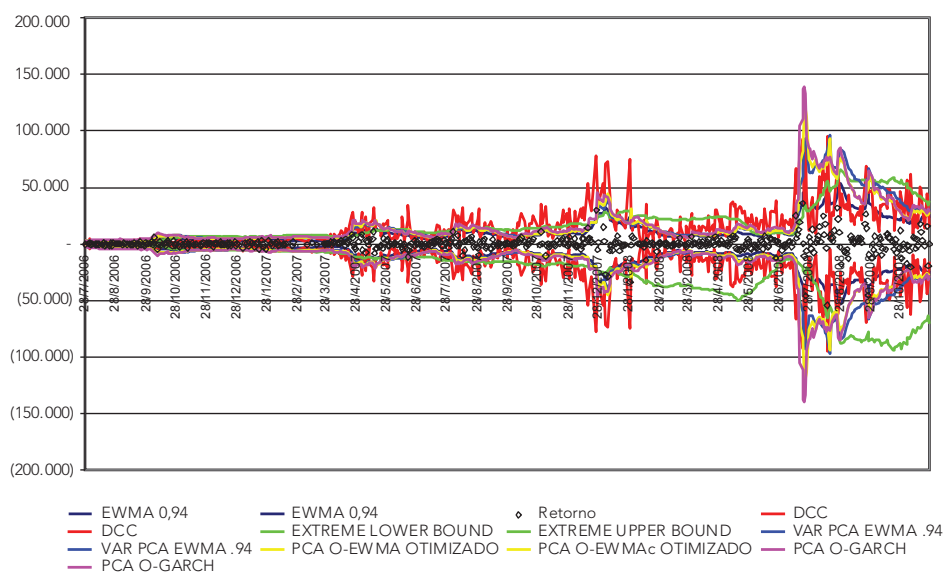
Fonte: Elaborado pelos autores.

## 4.4 Carteira C

A carteira C, de comportamento atípico, surpreendentemente, teve um desempenho bom do controle do risco pela frequência de falhas em todos os modelos testados. O VAR O-GARCH foi o de melhor controle na frequência e o de pior na perda. O VAR EWMA foi, destacadamente, o de menor custo e teve bom controle tanto na frequência quanto na pior perda. O VAR DCC, seguido pelo de valores extremos, foram ambos os que tiveram o pior desempenho do controle da pior perda.

Gráfico 7

Backtest da carteira C e VAR 99% por modelo



Fonte: Elaborado pelos autores.

**Tabela 3**

**Resultado backtest da carteira C**

Modelo	Falhas VAR 99%		Kupiec 5%		VAR médio 99%	Perda máxima (vezes VAR)	
	Vendido	Comprado	Vendido	Comprado		Vendido	Comprado
EWMA	1,65%	1,10%	OK	OK	11.647,84	3,57	-3,18
DCC	1,28%	1,10%	OK	OK	16.919,84	7,60	-6,61
O-EWMA	1,28%	0,37%	OK	OK	16.878,09	4,11	-4,34
O-GARCH	0,73%	0,37%	OK	OK	18.428,00	3,10	-4,34
O-EWMA .94	1,28%	0,37%	OK	OK	17.730,03	4,78	-4,05
EXTREME	0,92%	1,28%	OK	OK	18.640,89	5,36	-7,56

Fonte: Elaborada pelos autores.

**5**

**CONCLUSÕES**

Pelos resultados obtidos dentro da amostra de produtos selecionados e no período de análise, os melhores modelos pelo critério da ponderação entre controle de risco na frequência e na pior perda e custo de VAR médio foram o VAR tradicional por EWMA .94 e o VAR O-GARCH.

No entanto, a falha do controle de risco na frequência do modelo EWMA .94 dentro da carteira A é um ponto relevante a ser considerado, apesar do baixo custo médio de VAR aparente em todas as carteiras e do excelente controle da pior perda.

O VAR O-GARCH nessa estrutura se mostra o mais promissor, tendo em vista que ele não falha na frequência em nenhuma das carteiras selecionadas. Adiciona-se como ponto favorável e de melhoria nas próximas aplicações o uso de reponderações dos componentes e dos parâmetros de GARCH, de forma periódica, ao contrário de fixa.

Salienta-se que o resultado do VAR por valores extremos – de controle pouco eficiente da pior perda – pode ser resultante da metodologia pela qual ele foi construído: ao considerar um ajuste em um histórico passado para cada uma das caudas. Tal ajuste pode sofrer de viés assimetria (dada a necessidade de um evento em uma das pontas para atualização do risco), assim como de incapacidade de capturar aumentos repentinos na volatilidade.

## ORTHOGONAL MULTIVARIATE VALUE-AT-RISK FOR MARKET RISK: A COMPARATIVE STUDY

### Abstract

The main approach of the present study is to empirically explore different approaches to estimate the multivariate distribution of market risk factors with a greater emphasis on orthogonal models. It has been explored five different models: 1. the dynamical conditional correlation models (DCC); 2. the principal component model (better the traditional RiskMetrics EWMA with 0.94 decay factor; 3. optimized GARCH with EWMA 0.94 on the correlation; and 4. an approach for extreme values distributions. The results indicate a better performance of principal component model.

**Keywords:** Principal components; GARCH; EWMA.

### Referências

ALEXANDER, C. *Practical financial econometrics*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

BOLLERSLEV, T. Modeling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. *Review of Economic and Statistics*, v. 72, n. 3, p. 498-505, Aug. 1990.

ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: a simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 20, n. 3, p. 339-350, June 2002.

JOHNSON, R. A.; WICHERN, D. W. *Applied multivariate statistical analysis*. 5. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

KUPIEC, P. H. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*, v. 3, n. 2, p. 73-84, Winter 1995.

TSAY, R. S. *Analysis of financial time-series*. 2. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.