5

TRADE-OFF DESEMPREGO-INFLAÇÃO: UMA ANÁLISE DA APLICAÇÃO DE DIFERENTES CONDIÇÕES DE TRANSVERSALIDADE SOBRE UMA VERSÃO ADAPTADA DO MODELO DE TAYLOR

Tácito Augusto Farias
Graduado em Economia pela Faculdade de Ciências Políticas e Econômicas do Rio de Janeiro e em Matemática pela Universidade Federal de Roraima (UFRR). Mestre em Economia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e doutor em Economia Aplicada pela Universidade de São Paulo (USP). Professor doutor associado do Departamento de Economia da Universidade Federal de Sergipe (UFS).
E-mail: tacitoaugusto@ufs.br

Fábio Rodrigues de Moura
Mestrando em Economia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
E-mail: fabirosmash@yahoo.com.br

João Júnior
Mestrando em Economia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
E-mail: bjotajr@hotmail.com

Henrique Veras
Mestrando em Economia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
E-mail: henriqueverasdepaiva@gmail.com

André Melo
Doutorando em Economia pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
E-mail: andredesouzam@gmail.com

Resumo

O objetivo deste trabalho consiste em analisar os efeitos da aplicação de condições de transversalidade sobre uma versão adaptada do modelo *trade-off* desemprego-inflação de Taylor (1989). A necessidade de aplicar as condições de transversalidade surge na medida em que modificamos a abordagem do modelo base, mais precisamente quando tonarmos variáveis as condições de fronteira do problema. Nesse sentido, propomos quatro diferentes abordagens: linha terminal horizontal (tempo final variável), linha terminal vertical (estado terminal variável), estado terminal e tempo final variáveis, e horizonte de planejamento infinito. Os resultados encontrados nos mostram que, exceto em um dos casos, as condições de transversalidade acabam por alterar os resultados originais, sugerindo assim que o problema pode de fato ser visto sob ópticas diferentes no que diz respeito à elaboração de políticas.

Palavras-chave: Condições de transversalidade; *Trade-off* desemprego-inflação; Modelo de Taylor.

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo demonstrar a importância das condições de transversalidade na óptica do cálculo de variações, utilizando como problema-base o modelo adaptado de Taylor (1989) de *trade-off* desemprego-inflação. A análise é realizada com base na proposta de Chiang (2000). Supõe-se que, dependendo das hipóteses adotadas acerca do comportamento das variáveis que compõem as condições de fronteira, a utilização de condições de transversalidade específicas pode acabar modificando a solução original do problema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 *Trade-off* desemprego-inflação

A abordagem teórica que melhor explica o *trade-off* entre inflação e desemprego é conhecida como a curva de Phillips. Segundo Stiglitz e Walsh (2003), a teoria da curva de Phillips foi desenvolvida por A. W. Phillips, para demonstrar a existência de uma relação inversa entre o desemprego e a taxa de aumento dos salários monetários do Reino Unido, no período de 1861 a 1957.

Como principal instrumental e fundamento teórico, a curva de Phillips relaciona a inflação com a taxa de desemprego, sendo o emprego uma *proxy* do nível de atividade da economia. Como citado, o conceito da curva de Phillips surgiu no final da década de 1950, tornando-se a partir de então um dos principais instrumentos na tomada de decisão de políticas macroeconômicas econômicas. Desde o seu surgimento, a teoria sofreu vários ajustes de acordo com a conjuntura econômica e questionamentos teóricos. No entanto, a relação apresentou algumas contradições no decorrer de sua existência. Apesar de adaptações, a maneira como as variáveis desemprego e inflação relacionam-se varia de país a país e ao longo do tempo (BLANCHARD, 2005).

Para ajudar a explicar a relação entre inflação e desemprego no curto e no longo prazos, Friedman e Phelps introduziram uma nova variável na análise: a inflação esperada, que mede a expectativa relativa à variação do nível geral de preços (MANKIW, 2001).

Segundo Froyen (2001), na visão dos monetaristas, dentre eles a de Milton Friedman, o *trade-off* entre a taxa de desemprego e a taxa de inflação pode ser observado somente no curto prazo. De acordo com Friedman (1968), as combinações entre a oferta dos fatores de produção, tecnologia e instituições econômicas determinam o equilíbrio entre o produto e a taxa de emprego no longo prazo. Alterações na demanda agregada acarretam apenas movimentos temporários na economia, e as forças de equilíbrio fazem que os níveis de produto retornem à sua taxa natural.

No longo prazo, as pessoas passam a esperar qualquer taxa de inflação. Como percepções, salários e preços acabarão por se ajustar à taxa de inflação, e a curva de oferta agregada de longo prazo é vertical. Nesse caso, variações na demanda agregada, tais como aquelas decorrentes de alterações na oferta de moeda, não alteram a produção de bens e serviços (MANKIW, 2001).

Para Mankiw (2001), a taxa natural de desemprego não deve ser considerada como a taxa de desemprego desejada para uma economia. Nem mesmo deve ser considerada como constante; ela depende de fatores específicos do mercado de trabalho, tais como o poder dos sindicatos, a legislação do salário mínimo, a eficácia da busca pelo emprego, entre outros.

Ainda segundo Mankiw (2001), aumentos na oferta de moeda, aumento ou redução nas despesas do governo ou cortes nos impostos, ou seja, instrumentos de políticas monetária e fiscal, deslocam a economia ao longo da curva de Phillips. Contudo, esses instrumentos não exercem influência sobre a taxa natural de desemprego. Ela somente poderá ser reduzida se houver mudanças no funcionamento do mercado de trabalho, como melhorias na legislação do salário mínimo, na legislação relativa à negociação salarial, criação de programas de treinamentos ou na mudança da estrutura produtiva e da produtividade do trabalho.

Apesar de o arcabouço teórico ter evoluído e vários ajustes terem sido feitos nas teorias iniciais, a curva de Phillips é um instrumento um tanto quanto incerto. A discussão sobre como são formadas expectativas coloca em questão até a própria existência do *trade-off*. Segundo Sicsú (2002), não existem amplas evidências, entre os economistas, de que a curva de Phillips com expectativas possa realmente explicar a realidade. Em seu manual, Blanchard (2005, p. 26) escreveu:

> Essa relação manteve-se adequada a partir de 1970. Mas evidências de sua história anterior, assim como evidências de outros países, indicam a necessidade de diversas advertências. Todas elas sobre o mesmo tema: a relação entre inflação e desemprego pode variar – e de fato varia – entre países e ao longo do tempo.

2.2 Teoria das expectativas adaptativas

Conforme explicitado anteriormente, as expectativas dos agentes desempenham fundamental papel sobre a formulação da curva de Phillips. Nesse caso, a influência dá-se sobre como os agentes formam suas expectativas em relação ao nível de preços em uma data no futuro. Cagan (1956) formula que a inflação esperada é formada por meio de uma média ponderada entre as inflações esperada e efetiva de períodos anteriores.

Friedman (1968) constrói um modelo assumindo a formulação expressa por Cagan (1956) para as expectativas dos agentes quanto à inflação, indicando uma relação nominal entre inflação e desemprego no longo prazo. Ou seja, a curva de Phillips assumiria um formato vertical, indicando que políticas monetárias para controle de variáveis reais, tais como desemprego e produto, seriam inócuas no longo prazo.

De acordo com Marques (1987), considerando uma função de expectativas dos agentes dessa forma, ela permite a ocorrência de erros contínuos de previsão, os quais possibilitem, mesmo no longo prazo, alguma relação entre a inflação e o desemprego. Para tanto, seria apenas necessário permitir que as taxas de inflação possam variar sistematicamente.

Podemos observar, portanto, que ainda existe muito debate acerca da relação entre inflação e o nível de desemprego. Muitos modelos (teóricos e empíricos) abordam o tema de maneiras distintas, apresentando, consequentemente, resultados bastante controversos. O problema torna-se mais interessante após a aclamada "Crítica de Lucas" e sua teoria das expectativas racionais, a qual supõe que os agentes, em vez de apenas observarem valores passados, captam todas as informações disponíveis para formular suas expectativas. Dessa forma, vários modelos macroeconômicos estariam superestimando a rigidez de variáveis reais.

2.3 Modelo de Dornbusch

Em economias abertas com taxa de câmbio flexível, é de conhecimento notório que a taxa de câmbio apresenta um comportamento extremamente volátil, sugerindo que o mercado de divisas seja um dos mais (se não o maior) voláteis que existem. Isso também é observado em mercados de ativos em geral, como títulos, ações e derivativos. Essa mudança de condições com bastante frequência se deve aos constantes choques sofridos pela economia. Todavia, os mercados de bens também estão sujeitos a essa grande intensidade de choques. Por que, então, não se observa essa inconstância nesses mercados? Uma das possíveis explicações foi sugerida por Dornbusch (1976), no que ficou conhecido na literatura econômica como *modelo do* overshooting.

A ideia do modelo de Dornbusch parte de uma premissa que, à época – década de 1970 – não era aceita pelo *mainstream* econômico: rigidez de preços, ou seja, os preços domésticos são fixos no curto prazo e se ajustam lentamente em direção ao equilíbrio de longo prazo. A suposição encarada como mais adequada naquele tempo era de que os preços são perfeitamente flexíveis segundo Rogoff (2002). Vale dizer também que o modelo apresenta vários elementos do clássico modelo de curto prazo de Mundell-Fleming para uma economia aberta.

Para que se possa entender a razão da alcunha de "modelo do *overshooting*" (e consequentemente a essência deste trabalho), é necessário expor antes algumas relações. A primeira consiste na paridade de juros descoberta, que compreende a igualdade entre retornos de ativos internos e externos, ajustada a variações na taxa de câmbio. A lógica dessa igualdade decorre da aplicação da lei do preço único e da inexistência de arbitragem. Assim, tem-se:

$$i_t = i^*_t + E\left(e_{t+1} - e_t\right) \tag{2.1}$$

em que i é a taxa de juros doméstica; i*, a taxa de juros estrangeira; e o último termo, a expectativa de desvalorização da taxa de câmbio nominal logarítmica. Dornbusch (1976) supõe previsão perfeita dos agentes (isso se deve ao fato de que, na época em que foi produzido, as ferramentas para lidar com incerteza ainda não estavam totalmente desenvolvidas). A outra relação necessária é a demanda por moeda, dada por:

$$m_t - p_t = -\mu i_{t+1} + \sigma y_t \tag{2.2}$$

em que m é a oferta de moeda nominal; p, o nível de preços; e y, o produto real; μ e σ são parâmetros positivos. Além disso, adicionam-se as hipóteses de neutralidade da moeda e produto real determinado exogenamente.

Agora pode-se explicar a mecânica do *overshooting*. Suponha um aumento inesperado na oferta de moeda nominal. Como os preços são fixos no curto prazo, a oferta de moeda real aumentará. Dado que o produto real é exógeno e move-se lentamente, todo o ajuste do lado da demanda terá que ser feito via queda da taxa de juros interna. Mas, levando em conta que a economia em análise seja pequena em relação ao resto do mundo, para que a taxa de juros caia e a paridade de juros seja respeitada, é preciso que haja expectativa de apreciação da taxa de câmbio. Contudo, como será possível o câmbio se apreciar se partimos da hipótese inicial de uma expansão monetária? A resposta está na ideia brilhante de *overshooting* de Dornbusch. Inicialmente, o câmbio subirá bastante, ultrapassando o novo nível de equilíbrio. Dessa forma, abre-se espaço para uma apreciação no curto prazo, sem impedir uma depreciação no longo prazo. Essa é a ideia principal subjacente ao modelo de Dornbusch.

2.4 Modelo de Dean Taylor original

Baseado no modelo de Dornbusch que especifica a equação de ajuste de preço como um *trade-off* inflação e desemprego ou uma curva de Philips simplificada, Taylor (1989) afirma que, embora essa especificação possa ser apropriada no ambiente que ele considera em seu trabalho, é fora da realidade com uma política monetária inflacionária. Uma expansão monetária contínua somente gera inflação, e o produto persistentemente excede o nível de pleno emprego.

O trabalho de Taylor analisa dois casos em que uma variável em t+1 (chamada *forward-looking*) é adicionada à equação de ajuste preço. No primeiro caso, é adicionada taxa de crescimento da moeda. No segundo, é adicionada a taxa de mudança do preço de equilíbrio. De acordo com Taylor (1989), essas duas equações de ajuste de preço ocasionam as mesmas políticas monetárias ótimas para frear a inflação. Um choque no estoque de moeda seguido por nenhum crescimento monetário freia a inflação sem custos e instantaneamente. Quando essas taxas de crescimento *forward-looking* são adicionadas no modelo, a taxa inflação é perfeitamente flexível. Ou seja, com um choque apropriado no estoque de moeda, a economia pode caminhar de uma taxa de inflação de estado estacionário para outra situação de estado estacionário sem nenhum efeito na renda.

A primeira equação adicionada de um termo que representa o crescimento monetário é denotada por:

$$\dot{p} = \pi\left(Y - \overline{Y}\right) + \dot{m} \tag{2.3}$$

onde $\dot{m}$ é a taxa de crescimento contemporâneo da moeda. A segunda equação proposta por Taylor sugere que, aumentando a equação de ajuste de preço pela solução de taxa de mudança de equilíbrio para o nível de preço, $\overline{p}$, os preços tornam-se totalmente flexíveis. A equação de preço se torna:

$$\dot{p} = \pi\left(Y - \overline{Y}\right) + \overline{p} \qquad (2.4)$$

Para resumir, com (2.3) e (2.4), a inflação pode ser controlada sem causar uma recessão, pois, embora os preços sejam rígidos e não sofram choques, a taxa de inflação é perfeitamente flexível. A taxa de inflação pode ser reduzida instantaneamente aumentando a oferta de moeda para o novo nível de equilíbrio na taxa de inflação desejada e, assim, mantém o crescimento monetário igual à taxa de inflação.

Ademais, quando a inflação tem um *momentum* de expectativas que são formadas adaptativamente da inflação passada, a economia pode sofrer uma recessão para reduzir a inflação. A política ótima utilizando uma função de perda quadrática vai depender dos parâmetros do modelo e quão rápido as autoridades querem decrescer a taxa de inflação. Uma apreciação da taxa de câmbio e um aumento na taxa de juros também causam recessão.

3 *TRADE-OFF* DESEMPREGO-INFLAÇÃO: O MODELO ADAPTADO DE TAYLOR

O modelo-base de *trade-off* desemprego-inflação que iremos utilizar neste trabalho consiste em uma adaptação do modelo original de Taylor (1982), conforme apresentado em Chiang (2000). Nessa versão adaptada, além de algumas simplificações realizadas no modelo, o horizonte de planejamento é modificado de infinito para um tempo finito T.

O primeiro passo para resolver o modelo consiste em construir o funcional objetivo do nosso problema. O funcional é composto pela função perda social, que expressa a aversão do governo à inflação, bem como ao desvio da renda de seu nível de equilíbrio. O objetivo então é minimizar o funcional, sujeito às condições de fronteira estabelecidas (que serão fixas nesse modelo-base). Para tanto, utilizaremos o cálculo de variações que nos permite, por meio da equação de Euler, encontrar a trajetória solução da variável de estado. Por fim, aplicaremos as condições de segunda ordem a fim de testarmos se o funcional de fato é minimizado.

3.1 A função perda social

Seja o cenário econômico ideal dado por um nível de renda de pleno emprego Y_p conjuntamente com uma taxa de inflação p' igual a zero. Qualquer desvio, positivo ou negativo, do nível atual de renda Y do seu nível de equilíbrio Y_p é considerado indesejável, assim como qualquer desvio da taxa de inflação p' de zero. Tendo isso em mente, podemos escrever a função perda social como se segue

$$\lambda = \left(Y_p - Y\right)^2 + \alpha p'^2 \qquad (\alpha > 0) \tag{3.1}$$

A fim de que os desvios positivos e negativos sejam contados da mesma forma, os termos foram elevados ao quadrado. Note, entretanto, que os desvios de Y e p' entram na função com pesos diferentes, na proporção de 1 para α, o que reflete os diferentes graus de aversão aos dois tipos de desvios.

Pela Lei de Okun, o hiato do produto (Y_p – Y) pode ser considerado uma *proxy* para a variável desemprego. Nesse sentido, a curva de Phillips ampliada que captura o *trade-off* entre desemprego e inflação pode ser expressa como

$$p' = -\beta\left(Y_p - Y\right) + \pi \qquad (\beta > 0) \tag{3.2}$$

em que π representa a taxa esperada de inflação. A formação da expectativa inflacionária é adaptativa, de acordo com a equação de Cagan

$$\pi' = j\left(p - \pi\right) \qquad \left(0 < j \le 1\right) \tag{3.3}$$

Se a taxa atual de inflação p' exceder a taxa esperada de inflação π, temos que $\pi' > 0$, o que significa que π foi subestimada, e assim a expectativa inflacionária será revisada para cima. Por sua vez, se a inflação atual p' for inferior à taxa esperada π, então $\pi' < 0$, o que significa que π foi superestimada, e, portanto, a expectativa inflacionária será revisada para baixo.

Combinando as duas últimas equações, chegamos a:

$$\pi' = -\beta j\left(Y_p - Y\right) \tag{3.4}$$

Isso nos mostra que deve haver um *trade-off* de desemprego no curto prazo, a fim de obter um nível menor de inflação no longo prazo. A Equação (3.4) também pode ser escrita como

$$Y_p - Y = \frac{-\pi'}{\beta j} \tag{3.5}$$

Quando substituímos (3.5) em (3.2) temos

$$p' = \frac{\pi'}{j} + \pi \tag{3.6}$$

E, ao substituirmos (3.5) e (3.6) em (3.1), podemos expressar a função perda social inteiramente em termos da taxa esperada de inflação e de sua derivada no tempo

$$\lambda(\pi, \pi') = \left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2 \tag{3.7}$$

3.2 A formulação do problema

Temos então que o objetivo do governo, ou do tomador de políticas, é encontrar a trajetória ótima de π, a variável de estado, que minimiza a perda social sobre o intervalo de tempo [0, T]. No tempo inicial, o valor de π será expresso por π_0, e, no tempo final, será estabelecida, como meta de política, uma taxa esperada de inflação igual a zero. Além disso, com o intuito de ressaltar a importância do presente sobre o futuro, toda a perda social será descontada para o seu valor presente via uma taxa positiva de desconto ρ.

A partir dessas considerações, o problema do *policymaker* é

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt & \\ \text{Sujeito a} & \pi(0)=\pi_0 & (\pi_0>0) \\ & \pi(T)=0 & (T \text{ dado}) \end{array}$$

Em que $\Lambda[\pi]$ é o nosso funcional objetivo.

3.3 A trajetória solução

O cálculo de variações nos ensina que a condição necessária de primeira ordem para minimizar ou maximizar o funcional objetivo é dada pela equação de Euler. Considerando a variável de estado do nosso modelo-base, a equação de Euler é dada por

$$F_{\pi'\pi'}\pi'' + F_{\pi\pi'}\pi' + F_{t\pi'} - F_{\pi} = 0 \tag{3.8}$$

em que F é a função presente no integrando do funcional

$$F=\lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}=\left[\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2+\alpha\left(\frac{\pi'}{j}+\pi\right)^2\right]e^{-\rho t} \tag{3.9}$$

A equação de Euler é em geral uma equação diferencial de segunda ordem que envolve as derivadas parciais da função F. A solução geral, por conseguinte, conterá duas constantes arbitrárias. Como nosso problema contém duas condições de fronteira (uma inicial e outra final), há informação suficiente para definir as duas constantes arbitrárias e obter a solução particular.

Sendo assim, a função F fornece as seguintes primeiras derivadas

$$
\begin{aligned}
F_{\pi} &= 2\left[\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi' + \alpha\pi\right]e^{-\rho t} \\
F_{\pi'} &= 2\left[\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' + \left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi\right]e^{-\rho t}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

e segundas derivadas

$$
\begin{aligned}
F_{\pi'\pi'} &= 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t} \\
F_{\pi\pi'} &= 2\left(\frac{\alpha}{j}\right)e^{-\rho t} \\
F_{t\pi'} &= -2\rho\left[\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' + \left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi\right]e^{-\rho t}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Substituindo (3.11) na equação de Euler, temos

$$
\begin{aligned}
&2e^{-\rho t}\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'' + 2e^{-\rho t}\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi' - 2\rho e^{-\rho t}\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' - \\
&2\rho e^{-\rho t}\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi - 2e^{-\rho t}\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi' - 2\alpha e^{-\rho t}\pi = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Após simplificações, a equação (3.12) nos dá a condição necessária específica

$$
\begin{aligned}
&\pi''(t) - \rho\pi'(t) - \Omega\pi = 0 \\
&\text{em que } \Omega \equiv \frac{\alpha\beta^2 j(\rho + j)}{1+\alpha\beta^2} >
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

A equação de Euler dada em (3.13)[1] é uma equação diferencial homogênea de segunda ordem, cuja solução geral assume a forma

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{3.14}$$

onde r_1 e r_2 são as raízes características

$$r_1 = \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}}{2} \qquad r_2 = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\Omega}}{2} \tag{3.15}$$

Haja vista que a raiz quadrada em (3.15) tem um valor numérico maior ρ, podemos identificar o sinal das raízes características

$$r_1 > 0 \quad r_2 < 0 \tag{3.16}$$

Para encontrarmos o valor das constantes A_1 e A_2, utilizamos as condições de fronteira, fazendo sucessivamente t = 0 e t = T na solução geral (3.14). O seguinte sistema surge

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \pi_0 \\ A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

A solução das relações em (3.17) nos fornece

$$A_1 = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} \qquad A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} \tag{3.18}$$

1 Como estamos tratando de um problema autônomo do ponto de vista econômico (o tempo aparece como argumento no funcional apenas por meio do termo de desconto $e^{-\rho t}$), a equação de Euler terá sempre a forma $F_{\pi'\pi'}\pi'' + F_{\pi\pi'}\pi' - \rho F_{\pi'} - F_{\pi} = 0$ (KAMIEN; SCHWARTZ, 2000).

E devido ao sinal de r_1 e r_2, sabemos que

$$A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \tag{3.19}$$

Ao substituirmos (3.18) em (3.14), obtemos a trajetória ótima que a expectativa inflacionária deve seguir a fim de atender às condições de fronteiras estabelecidas e minimizar a perda social

$$\pi^*(t) = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} e^{r_1 t} + \frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} e^{r_2 t} \tag{3.20}$$

A taxa esperada de inflação segue uma trajetória contínua de decaimento, desde o seu valor inicial π_0 até o seu valor final igual a zero. Esse fato nos é revelado pela derivada primeira da solução particular (3.20), que é negativa em todo intervalo [0, T]

$$\pi^{*}{}'(t) = \frac{-r_1 \pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} e^{r_1 t} + \frac{r_2 \pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} e^{r_2 t} < 0 \tag{3.21}$$

Analisando mais a fundo o comportamento de π^*, observa-se, inicialmente, que a trajetória apresenta um decaimento a taxas crescentes (comportamento convexo) até um determinado ponto de inflexão t_{inf}, a partir do qual passa a apresentar um decaimento a taxas decrescentes (comportamento côncavo). Igualando a derivada segunda de π^* a zero, encontramos o ponto de inflexão

$$\begin{gathered} \pi^{*}{}''(t) = \frac{-r_1^2 \pi_0 e^{r_2 (T-t)} + r_2^2 \pi_0 e^{r_1 (T-t)}}{e^{r_1 T - (r_1 + r_2)t} - e^{r_2 T - (r_1 + r_2)t}} = 0 \therefore \\ t_{\text{inf}} = \frac{\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 + (r_1 - r_2)T}{(r_1 - r_2)} \end{gathered} \tag{3.22}$$

E desse modo, verifica-se que a trajetória segue o seguinte comportamento

$$\begin{gathered} \forall \ t < t_{\text{inf}} \rightarrow \pi^{*}{}''(t) > 0 \\ \forall \ t > t_{\text{inf}} \rightarrow \pi^{*}{}''(t) < 0 \end{gathered} \tag{3.23}$$

3.4 Condições de segunda ordem

De posse dos resultados do modelo-base, podemos testar se de fato a função perda social é minimizada no intervalo [0, T]. Um teorema de suficiência aplicado no cálculo de variações nos diz que, se a função F do nosso problema for convexa nas variáveis π e π', então a equação de Euler será suficiente para um mínimo absoluto de $\Lambda[\pi]$.

A fim de checarmos se $F(\pi, \pi')$ é convexa, podemos aplicar o teste do determinante para a definição do sinal da forma quadrática. Seja o discriminante da forma quadrática dado por

$$|D| \equiv \begin{vmatrix} F_{\pi'\pi'} & F_{\pi'\pi} \\ F_{\pi\pi'} & F_{\pi\pi} \end{vmatrix} \tag{3.24}$$

os dois menores principais são assim definidos

$$\begin{gathered} |D_1| \equiv |F_{\pi'\pi'}| \\ |D_2| \equiv \begin{vmatrix} F_{\pi'\pi'} & F_{\pi'\pi} \\ F_{\pi\pi'} & F_{\pi\pi} \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{3.25}$$

Temos então as seguintes possibilidades

$$|D_1| < 0,\ |D_2| > 0 \Leftrightarrow \text{Forma quadrática negativa definida} \Rightarrow F(\pi,\pi') \text{ estritamente côncava}$$
$$|D_1| > 0,\ |D_2| > 0 \Leftrightarrow \text{Forma quadrática positiva definida} \Rightarrow F(\pi,\pi') \text{ estritamente convexa}$$

Com efeito, os menores principais têm os seguintes sinais

$$\begin{gathered} |D_1| \equiv |F_{\pi'\pi'}| = 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t} > 0 \\ |D_2| \equiv \begin{vmatrix} F_{\pi'\pi'} & F_{\pi'\pi} \\ F_{\pi\pi'} & F_{\pi\pi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)e^{-\rho t} & 2\left(\frac{\alpha}{j}\right)e^{-\rho t} \\ 2\left(\frac{\alpha}{j}\right)e^{-\rho t} & 2\alpha e^{-\rho t} \end{vmatrix} = 4\left(\frac{\alpha}{\beta^2 j^2}\right)e^{-2\rho t} > 0 \end{gathered} \tag{3.26}$$

Assim sendo, F(π, π') é estritamente convexa, e a equação de Euler é suficiente para minimizar a perda social no intervalo de tempo estipulado.

O teste de concavidade realizado é uma condição suficiente de segunda ordem que está relacionada ao conceito de globalmente côncavo ou globalmente convexo. Entretanto, se a função F não fosse globalmente convexa, seria necessário estabelecer condições mais fracas. Uma condição necessária de segunda ordem frequentemente utilizada no cálculo de variações e que está baseada no conceito de localmente côncavo/convexo é conhecida como condição de Legendre, a qual é muito simples de ser testada, pois envolve apenas o sinal de uma das derivadas parciais da função F. Para o nosso problema, a condição de Legendre é tal que

$$\begin{aligned} &\text{Minimização de } \Lambda[\pi] \Rightarrow F_{\pi'\pi'} \geq 0 \\ &\text{Maximização de } \Lambda[\pi] \Rightarrow F_{\pi'\pi'} \leq 0 \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Podemos concluir por (3.26) que a condição necessária de Legendre para um mínimo de $\Lambda[\pi]$ é atendida.

4 CONDIÇÕES DE TRANSVERSALIDADE: MODIFICANDO AS CONDIÇÕES DE FRONTEIRA DO MODELO-BASE

De posse dos resultados anteriores, podemos agora iniciar o objetivo principal do nosso trabalho, qual seja, aplicar as condições de transversalidade sobre o modelo-base de *trade-off* desemprego-inflação. As condições de transversalidade são necessárias quando substituímos uma condição de fronteira fixa por uma condição de fronteira variável; no nosso caso, tornaremos variável a condição final do problema. Nesse sentido, analisaremos quatro diferentes abordagens: o problema da linha terminal horizontal (quando o valor final da variável de estado é fixo, mas o tempo final é variável); o problema da linha terminal vertical (quando o tempo final é fixo, mas o valor terminal da variável de estado é variável); o problema do tempo final variável e do estado terminal variável; e, por fim, o problema do horizonte de planejamento infinito.

Buscaremos demonstrar, em cada caso, como a mudança do enfoque sobre o modelo modifica (ou não) os resultados originais. Isso é de grande importância, pois amplia o leque de possibilidades para o *policymaker*, auxiliando-o em suas decisões.

4.1 Linha terminal horizontal: o problema do ponto final fixo

Nesta primeira abordagem, o tempo final é deixado livre (variável) e sua escolha torna-se parte integrante do processo de otimização do modelo. A falta de um tempo final fixo impossibilita a resolução do problema unicamente pelas condições de fronteira, exigindo, portanto, uma condição de transversalidade apropriada que nos forneça as informações auxiliares. Tal condição de transversalidade nos permite determinar endogenamente o tempo ótimo necessário para minimizar o funcional, sujeito a uma meta fixa para a variável de estado no tempo final encontrado. O nosso problema assume então o seguinte formato:

- É possível, para o *policymaker*, encontrar o tempo ótimo necessário para minimizar a perda social, sujeito a um valor fixo para a expectativa inflacionária no tempo final?

  Ou:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt \\ &\text{Sujeito a} \quad \pi(0) = \pi_0 \quad (\pi_0 > 0) \\ &\qquad\qquad\quad \pi(T) = \pi_T \quad (\pi_T < \pi_0, T \text{ livre}, \pi_T \text{ dado}) \end{aligned}$$

Dadas as restrições apresentadas, um questionamento que poderia surgir é se podemos ter $\pi(T) = \pi_T = 0$. Considerando que o tempo final é livre e determinado pelo modelo, não iremos supor que a expectativa inflacionária deva ser necessariamente zero em T. Ao encontrarmos a solução particular, poderemos testar se tal suposição é factível.

De (3.14), a solução geral da equação de Euler é dada por

$$\pi^*(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} \tag{4.1}$$

A condição inicial estabelecida continua sendo a mesma, $\pi(0) = \pi_0$. Substituindo-a na solução geral, temos

$$A_1 + A_2 = \pi_0 \qquad (4.2)$$

Precisamos agora de uma condição de transversalidade que nos permita especificar por completo as constantes A_1 e A_2. Como estamos lidando com um problema de linha terminal horizontal, a condição de transversalidade apropriada é

$$[F - \pi' F_{\pi'}]_{t=T} = 0 \qquad (4.3)$$

Sabemos por (3.9) e (3.10) que

$$\begin{aligned} F &= \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t} = \left[\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2\right]e^{-\rho t} \\ F_{\pi'} &= 2\left[\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi' + \left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi\right]e^{-\rho t} \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Substituindo (4.4) na condição de transversalidade, obtemos

$$\left[\left(\frac{\pi'}{\beta j}\right)^2 + \alpha\left(\frac{\pi'}{j} + \pi\right)^2 - 2\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'^2 - 2\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi\pi'\right]e^{-\rho t} = 0 \ \ (\text{em que } t = T) \qquad (4.5)$$

E após algumas simplificações, a condição de transversalidade pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\pi'(T) - \sigma\pi(T) = 0 \\ &\text{em que } \sigma \equiv \left(\frac{\alpha j^2 \beta^2}{1+\alpha\beta^2}\right)^{1/2} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Os termos $\pi(T)$ e $\pi'(T)$ são obtidos por meio da solução geral e de sua derivada, fazendo t = T em $\pi^*(t)$. Com isso, podemos escrever (4.6) de uma forma mais específica

$$(r_1-\sigma)A_1e^{r_1T}+(r_2-\sigma)A_2e^{r_2T}=0 \tag{4.7}$$

Para definir os valores das constantes arbitrárias, é necessário resolver simultaneamente o par de relações dado pela condição de transversalidade (4.7) e pela condição inicial

$$\begin{cases} A_1+A_2=\pi_0 \\ (r_1-\sigma)A_1e^{r_1T}+(r_2-\sigma)A_2e^{r_2T}=0 \end{cases} \tag{4.8}$$

A solução do sistema nos fornece

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-\pi_0(r_2-\sigma)e^{r_2T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}} \\ A_2 &= \frac{\pi_0(r_1-\sigma)e^{r_1T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}} \end{aligned} \tag{4.9}$$

E substituindo (4.9) em (4.1), transformamos a solução geral em solução particular do problema

$$\pi^*(t)=\frac{-\pi_0(r_2-\sigma)e^{r_2T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}}e^{r_1t}+\frac{\pi_0(r_1-\sigma)e^{r_1T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}}e^{r_2t} \tag{4.10}$$

A fim de evitar ambiguidade nos sinais de A_1 e A_2, é necessário avaliar o sinal de $(r_1 - \sigma)$. De forma analítica, verifica-se que $(r_1 - \sigma) > 0$ para quaisquer valores dos parâmetros, já que

$$(r_1-\sigma)=\frac{1}{2}\left\{\rho+\left[\frac{\rho^2(1+\alpha\beta^2)+4\alpha\beta^2 j\rho+4\alpha\beta^2 j^2}{(1+\alpha\beta^2)}\right]^{1/2}-\left[\frac{4\alpha\beta^2 j^2}{(1+\alpha\beta^2)}\right]^{1/2}\right\}>0 \tag{4.11}$$

E assim inferimos

$$A_1 > 0 \quad A_2 > 0 \tag{4.12}$$

Podemos agora testar se é admissível a expectativa inflacionária assumir o valor zero no tempo final. Utilizando (4.10) e fazendo t = T, temos

$$\pi_T = \frac{e^{(r_1+r_2)T}\pi_0(r_1 - r_2)}{(r_1-\sigma)e^{r_1T} - (r_2-\sigma)e^{r_2T}} \tag{4.13}$$

Observa-se não ser possível, em um tempo finito, estabelecer que $\pi_T = 0$. Isso somente seria possível se $r_1 = r_2$, o que não é verdade por (3.15). Concluímos assim que, ao modificar o problema original para um problema de linha terminal horizontal, onde o tempo é deixado livre, é possível minimizar a função perda social sem que haja a necessidade de a taxa esperada de inflação ser reduzida até zero no tempo final. O governo pode estipular uma meta positiva fixa para π e ainda assim minimizar a perda social resultante do *trade-off* desemprego-inflação.

A partir dessas considerações, podemos finalmente determinar de forma endógena o tempo ótimo necessário para alcançar o objetivo proposto, tal que $0 < \pi_T < \pi_0$ em T. Para tornar a expressão final mais clara, tomemos as seguintes relações obtidas através de (3.15)

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \rho \\ r_1 - r_2 &= (\rho^2 + 4\Omega)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{e^{\rho T}\pi_0(\rho^2+4\Omega)^{1/2}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T} - (r_2-\sigma)e^{r_2T}} = \pi_T \therefore \\ &e^{\rho T}\pi_0(\rho^2+4\Omega)^{1/2} = \pi_T(r_1-\sigma)e^{r_1T} - \pi_T(r_2-\sigma)e^{r_2T} \end{aligned} \tag{4.15}$$

Na forma como (4.15) se encontra, não é possível expressar explicitamente T com relação aos demais parâmetros do modelo. Entretanto, verifica-se que o termo $\pi_T(r_2 - \sigma)e^{r_2T}$ tende rapidamente a zero para valores crescentes de T. Se o desconsiderarmos da expressão, poderemos encontrar uma boa aproximação para o tempo ótimo.

Seguindo esse raciocínio e aplicando o log em (4.15), encontramos

$$\rho T + \ln\left[\pi_0(\rho^2 + 4\Omega)^{1/2}\right] = \ln\left[\pi_T(r_1 - \sigma)\right] + r_1 T \therefore$$
$$T^* \cong \frac{\ln\left[\dfrac{\pi_0(\rho^2 + 4\Omega)^{1/2}}{\pi_T(r_1 - \sigma)}\right]}{(r_1 - \rho)} \qquad (4.16)$$

Por fim, demonstra-se que a expressão (4.16) garante um T* sempre positivo, visto que

$$(r_1 - \rho) = \frac{1}{2}\left[(\rho^2 + 4\Omega)^{1/2} - \rho\right] > 0$$
$$\frac{\pi_0}{\pi_T} > 1 \qquad (4.17)$$
$$\frac{(\rho^2 + 4\Omega)^{1/2}}{(r_1 - \sigma)} > 1$$

As relações em (4.17) valem para quaisquer valores dos parâmetros.

4.2 Linha terminal vertical: o problema do horizonte de tempo fixo

No problema original, tínhamos um ponto terminal fixo $\pi(T)$, bem como um tempo final fixo T, de modo que o objetivo era minimizar a perda social sujeita a uma taxa esperada de inflação igual a zero no tempo final: $\pi(T) = 0$. Ao aplicarmos a ideia da linha terminal vertical, modificamos o problema inicial: agora a condição terminal para a variável de estado, $\pi(T)$, é deixada livre no tempo final T, que permanece fixo. Mediante uma condição de transversalidade, podemos determinar endogenamente o valor ótimo que a variável de estado deve assumir no tempo final a fim de minimizar o funcional.

Nesse segundo caso, o nosso problema é assim formulado:

- Pode o governo determinar o valor ótimo da expectativa inflacionária necessário para minimizar a perda social, sujeito a um tempo final fixo?

Ou ainda:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt \\ &\text{Sujeito a} \quad \pi(0)=\pi_0 \qquad (\pi_0>0) \\ &\qquad\qquad\quad \pi(T)=\pi_T \qquad (\pi_T \text{ livre, } T \text{ dado}) \end{aligned}$$

Começamos a resolução do modelo recuperando a solução geral

$$\pi^*(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} \tag{4.18}$$

bem como a condição inicial, que não se modifica:

$$A_1+A_2=\pi_0 \tag{4.19}$$

Agora utilizamos a condição de transversalidade necessária para resolver o problema da linha terminal vertical, qual seja

$$[F_{\pi'}]_{t=T}=0 \tag{4.20}$$

Por meio de (3.10), a condição de transversalidade assume a forma

$$2\left[\left(\frac{1+\alpha\beta^2}{\beta^2 j^2}\right)\pi'+\left(\frac{\alpha}{j}\right)\pi\right]e^{-\rho t}=0 \tag{4.21}$$

Simplificando

$$\pi'(T)+\theta\pi(T)=0$$
$$\text{em que } \theta\equiv\frac{\alpha j\beta^2}{1+\alpha\beta^2} \tag{4.22}$$

Da solução geral, obtemos $\pi(T)$ e $\pi'(T)$. Substituindo em (4.22), temos a forma específica da condição de transversalidade:

$$(r_1+\theta)A_1e^{r_1T}+(r_2+\theta)A_2e^{r_2T}=0 \tag{4.23}$$

A condição de transversalidade nos permite recuperar a informação sobre a condição terminal que foi perdida quando deixamos livre a variável de estado no tempo final T. Ao juntarmos (4.19) com (4.23), temos o necessário para determinar as constantes do problema

$$\begin{cases} A_1+A_2=\pi_0 \\ (r_1+\theta)A_1e^{r_1T}+(r_2+\theta)A_2e^{r_2T}=0 \end{cases} \tag{4.24}$$

Avaliando A_1 e A_2, encontramos

$$A_1=\frac{-\pi_0(r_2+\theta)e^{r_2T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}$$
$$A_2=\frac{\pi_0(r_1+\theta)e^{r_1T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}} \tag{4.25}$$

Para definir os sinais de A_1 e A_2, é necessário verificar o sinal do termo $(r_2+\theta)$. Com o auxílio de certa álgebra, é possível demonstrar que

$$(r_2+\theta)=\frac{1}{2(1+\alpha\beta^2)}\left\{\frac{\left[\rho(1+\alpha\beta^2)+2\alpha\beta^2 j\right]-}{\sqrt{\left[\rho(1+\alpha\beta^2)+2\alpha\beta^2 j\right]^2+4\alpha\beta^2 j^2}}\right\}<0 \tag{4.26}$$

Temos então

$$A_1 > 0 \quad A_2 > 0 \tag{4.27}$$

A solução particular desse problema é configurada após substituirmos os valores das constantes na solução geral

$$\pi^*(t) = \frac{-\pi_0(r_2+\theta)e^{r_2T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}e^{r_1t} + \frac{\pi_0(r_1+\theta)e^{r_1T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}e^{r_2t} \tag{4.28}$$

A partir desse momento, podemos determinar endogenamente o valor final ótimo da variável de estado, ou seja, o valor de $\pi^*(T)$ que emerge da solução do modelo e minimiza a função perda social. Para tanto, verificamos o resultado de (4.28) em $t = T$, tal que T já é dado

$$\pi^*(T) = \frac{e^{(r_1+r_2)T}\pi_0(r_1-r_2)}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}} \tag{4.29}$$

Com o auxílio de (4.26), concluímos que

$$\pi^*(T) > 0 \tag{4.30}$$

O processo de otimização realizado pelo enfoque da linha terminal vertical não requer, portanto, que a taxa esperada de inflação seja igual a zero no tempo final. Isso significa que o governo, ao definir uma meta de tempo para minimizar a perda resultante do *trade-off*, conseguirá cumprir o seu objetivo a uma taxa final positiva de inflação esperada.

Podemos demonstrar também que $\pi^*(t)$ segue uma trajetória regular descendente até alcançar o seu valor final $\pi^*(T)$. Derivando a solução particular (4.28) com relação a t, encontramos:

$$\pi^{*\prime}(t) = \frac{-r_1\pi_0(r_2+\theta)e^{r_2T}e^{r_1t} + r_2\pi_0(r_1+\theta)e^{r_1T}e^{r_2t}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}} \tag{4.31}$$

Para melhor visualizar o sinal da derivada, multipliquemos (4.31) por $\frac{e^{-(r_1+r_2)t}}{e^{-(r_1+r_2)t}}$. A expressão que surge é

$$\pi^{*}{}'(t) = \frac{r_1 r_2 \pi_0 (e^{r_1(T-t)} - e^{r_2(T-t)}) + \theta(r_2 \pi_0 e^{r_1(T-t)} - r_1 \pi_0 e^{r_2(T-t)})}{(r_1+\theta)e^{r_1 T-\rho t} - (r_2+\theta)e^{r_2 T-\rho t}} \qquad (4.32)$$

Claramente (4.32) é negativo, pois

$$\begin{gathered} r_1 > 0 \quad \text{e} \quad r_2 < 0 \\ e^{r_1(T-t)} - e^{r_2(T-t)} \geq 0 \end{gathered} \qquad (4.33)$$

E assim

$$\pi^{*}{}'(t) < 0 \qquad (4.34)$$

Em todo o domínio $[0, T]$.

4.3 O problema do tempo livre e do ponto final livre: condições de transversalidade simultâneas

A ideia, na nossa terceira abordagem, consiste em deixar livre tanto o valor terminal da variável de estado, $\pi(T)$, quanto o tempo final T. Nesse cenário, a condição final do problema deve ser determinada completamente de forma endógena, e, por isso, faz-se necessário aplicar simultaneamente as duas condições de transversalidade anteriores. Por meio da resolução do modelo, podemos encontrar o tempo final ótimo, e o valor terminal ótimo da variável de estado que minimizam o funcional.

Temos então o seguinte problema:

- Há possibilidade, para o tomador de políticas, de determinar simultaneamente o valor ótimo da expectativa inflacionária e o tempo ótimo necessário para minimizar a perda social?

Ou:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt \\ &\text{Sujeito a} \quad \pi(0) = \pi_0 \quad (\pi_0 > 0) \\ &\qquad\qquad\quad \pi(T) = \pi_T \quad (\pi_T \text{ livre}, T \text{ livre}) \end{aligned}$$

As duas condições de transversalidade que precisam ser aplicadas já foram vistas nos dois problemas anteriores: uma relativa ao tempo final livre e outra relativa ao valor terminal de π.

$$\begin{aligned} &[F - \pi' F_{\pi'}]_{t=T} = 0 \\ &[F_{\pi'}]_{t=T} = 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Recuperando os resultados (4.6) e (4.22), temos

$$\begin{aligned} &\pi'(T) - \sigma\pi(T) = 0 \\ &\pi'(T) + \theta\pi(T) = 0 \\ &\text{em que} \quad \sigma \equiv \left(\frac{\alpha j^2 \beta^2}{1+\alpha\beta^2}\right)^{1/2} \quad \theta \equiv \frac{\alpha j \beta^2}{1+\alpha\beta^2} \end{aligned} \tag{4.36}$$

E resolvendo (4.36) simultaneamente, encontramos que

$$\pi(T) = 0 \tag{4.37}$$

Ou seja, as duas condições de transversalidade aplicadas juntas implicam que a variável de estado dever assumir o valor zero no tempo T. Como vimos no problema da linha terminal horizontal, não é possível termos um tempo final livre (endogenamente determinado) e ao mesmo tempo uma taxa esperada de inflação igual a zero no tempo final. A fim de que $\pi(T) = 0$, é indispensável, portanto, que o tempo final seja fixo.

Isso significa que, no modelo de *trade-off* desemprego-inflação, o governo não é capaz de definir, de forma endógena e simultânea, o tempo e o valor ótimo da expectativa inflacionária necessários para minimizar a perda social. Ou o valor final de uma dessas duas variáveis deve ser deixado fixo (linha terminal horizontal e linha terminal vertical) ou os valores finais de ambas devem ser fixos. O enfoque do tempo livre e do ponto final livre acaba, nesse modelo, por se degenerar em torno do problema original (condição final fixa).

Esse fato também pode ser verificado se continuarmos a resolver a condição de transversalidade. Dada a solução geral

$$\pi^*(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \tag{4.38}$$

Fazemos $t = T$ e substituímos em (4.37)

$$A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0 \tag{4.39}$$

E juntamente com a condição inicial

$$A_1 + A_2 = \pi_0 \tag{4.40}$$

Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = \pi_0 \\ A_1 e^{r_1 T} + A_2 e^{r_2 T} = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

Que é nada mais do que o par de relações do modelo inicial. Sabemos consequentemente que as constantes assumem os valores

$$\begin{gathered} A_1 = \frac{-\pi_0 e^{r_2 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} \\ A_2 = \frac{\pi_0 e^{r_1 T}}{e^{r_1 T} - e^{r_2 T}} \\ A_1 < 0 \quad A_2 > 0 \end{gathered} \tag{4.42}$$

Substituindo (4.42) na solução geral, verifica-se que a trajetória $\pi^*(T)$ que minimiza a perda social traz a necessidade de estipular uma meta de tempo para alcançar o valor nulo de expectativa inflacionária, da mesma forma que no problema-base inicial.

4.4 Horizonte de planejamento infinito

Para um governo, ou um planejador social, pode haver boas razões para estender o seu horizonte de planejamento indefinidamente no futuro, modificando assim o intervalo de integração no funcional objetivo de $[0, T]$ para $[0, \infty]$. Podemos, por exemplo, pensar em uma sociedade cuja existência supõe-se ser permanente. Tal abordagem tem a vantagem de tornar o processo de otimização mais compreensivo do ponto de vista da elaboração de políticas.

Como o horizonte de planejamento é infinito, fica claro que não há mais um tempo final fixo T que possamos utilizar. Ademais, é possível que o valor terminal da variável de estado também seja deixado livre. Isso implica que um dos caminhos para resolver o problema consiste em aplicar as condições de transversalidade, que agora devem levar em consideração um tempo não finito.

Em certos casos de horizonte infinito, entretanto, as condições de transversalidade acabam sendo de pouca ajuda na determinação das constantes de integração. Um das formas de contornar esse fato consiste em supor, com base em um razoável suporte econômico, que a solução do modelo gravita em torno de um estado estacionário no longo prazo. Se essa suposição for plausível, podemos simplesmente utilizar uma condição final apropriada no lugar da condição de transversalidade.

Elaboremos então o problema desta seção:

- Considerando um horizonte de tempo infinito, que trajetória a taxa esperada de inflação deve assumir a fim de minimizar a perda social? Supondo plausível, qual é o valor de estado estacionário para π?

  Ou:

$$\text{Minimizar} \quad \Lambda[\pi] = \int_0^\infty \lambda(\pi, \pi')e^{-\rho t}dt$$

$$\text{Sujeito a} \qquad \pi(0) = \pi_0 \qquad (\pi_0 > 0)$$

Primeiramente resolveremos o modelo utilizando as condições de transversalidade e não faremos suposições quanto ao valor terminal da expectativa inflacionária. Para um horizonte infinito, as condições de transversalidade são uma extensão natural das condições vistas anteriormente para um tempo finito, ou seja,

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty}\left(F-\pi' F_{\pi'}\right)=0\\ \lim_{t\to\infty}\left(F_{\pi'}\right)=0\end{gathered} \tag{4.43}$$

Substituindo (3.9) e (3.10) em (4.43) e simplificando, temos

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty}\left\{\left[\left(\frac{\alpha j^2\beta^2}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi^2-\pi'^2\right]e^{-\rho t}\right\}=0\\ \lim_{t\to\infty}\left(2\left[\pi'+\left(\frac{\alpha\beta^2 j}{1+\alpha\beta^2}\right)\pi\right]e^{-\rho t}\right)=0\end{gathered} \tag{4.44}$$

Através da solução geral

$$\pi^*(t)=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} \tag{4.45}$$

Obtemos $\pi(t)$ e $\pi'(t)$ e substituímos em (4.44). Após organizarmos os termos e efetuarmos certas simplificações, chegamos a

$$\begin{gathered}\lim_{t\to\infty}\left[-\rho(r_1+\theta)A_1^2e^{(2r_1-\rho)t}-2A_1A_2\left(\frac{\alpha j\beta^2\rho}{1+\alpha\beta^2}\right)-\rho(r_2+\theta)A_2^2e^{(2r_2-\rho)t}\right]=0\\ \lim_{t\to\infty}\left[(r_1+\theta)A_1e^{(r_1-\rho)t}+(r_2+\theta)A_2e^{(r_2-\rho)t}\right]=0\end{gathered} \tag{4.46}$$

em que θ já foi definido em (4.22). Considerando os sinais das raízes características, bem como as relações entre os parâmetros já vistas anteriormente, temos que as condições de transversalidade somente são atendidas no limite se

$$A_1=0 \tag{4.47}$$

Substituindo o valor de A_1 na condição inicial dada por

$$A_1 + A_2 = \pi_0 \tag{4.48}$$

Concluímos que

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= \pi_0 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Podemos, entretanto, resolver esse problema de modo mais conveniente. Suponha que seja razoável esperar que a expectativa inflacionária tenda assintoticamente a um valor de estado estacionário no longo prazo, dado por π_{ss}. Isso significa que a derivada primeira e a derivada segunda da variável de estado se igualam a zero no estado estacionário, ou seja, $\pi'' = \pi' = 0$ no longo prazo. Assim, recuperando a equação de Euler dada em (3.13)

$$\pi''(t) - \rho\pi'(t) - \Omega\pi(t) = 0 \tag{4.50}$$

Fazemos $t \to \infty$ e substituímos em (4.50) os valores de π', π'' e π de estado estacionário. O seguinte resultado aparece

$$\pi_{SS} = 0 \tag{4.51}$$

Que também pode ser visto como

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t) = \pi_{SS} = 0 \tag{4.52}$$

Isso nos mostra que, em um horizonte de planejamento infinito, a taxa esperada de inflação tende ao valor zero no estado estacionário. Esse resultado é de grande utilidade, pois (4.52) traduz-se na condição final de fronteira do problema, necessária para determinar os valores das constantes arbitrárias. Como temos uma condição final, não há a necessidade de aplicar uma condição de transversalidade. Além disso, substituindo (4.45) em (4.52), fica fácil perceber que a condição final é satisfeita somente se $A_1 = 0$, o que nos leva por consequência a $A_2 = \pi_0$ pela condição inicial, resultados idênticos aos encontrados em (4.49).

Por fim, podemos substituir os valores das constantes na solução geral, o que define a solução particular desse problema

$$\pi^*(t) = \pi_0 e^{r_2 t} \tag{4.53}$$

Essa trajetória representa a redução contínua da taxa esperada de inflação, de π_0 até zero. E quanto maior for o valor absoluto de r_2, mais rapidamente a expectativa inflacionária irá convergir para seu valor de estado estacionário.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho procurou demonstrar a importância das condições de transversalidade na óptica do cálculo de variações, utilizando como problema-base o modelo adaptado de Taylor (1989) de *trade-off* desemprego-inflação, conforme proposto por Chiang (2000). Como vimos, a depender da suposição acerca do comportamento das variáveis que compõem as condições de fronteira, faz-se necessário utilizar uma condição de transversalidade específica que pode acabar modificando a solução original do problema.

Em um horizonte de tempo finito, vimos que a abordagem da linha terminal horizontal nos possibilitou determinar o tempo ótimo necessário para minimizar o funcional. Além disso, verificou-se que a variável de estado deveria assumir um valor positivo fixo no tempo final. Já no enfoque da linha terminal vertical, onde o tempo é mantido fixo, determinamos endogenamente o valor ótimo da expectativa inflacionária que minimiza a perda social e vimos que esse é um valor positivo. Por sua vez, quando consideramos variável tanto o tempo final quanto o valor terminal da variável de estado, as condições de transversalidade implicam um retorno ao problema-base, evidenciando não ser possível, nesse modelo de *trade-off*, encontrar simultaneamente o tempo final ótimo e o valor terminal ótimo da expectativa inflacionária.

Por fim, quando alteramos o horizonte de planejamento de finito para infinito, as condições de transversalidade devem ser modificadas com vistas a incorporar o novo horizonte temporal. Vimos também que podemos alternativamente resolver o problema se julgarmos que a taxa esperada de inflação assume um valor constante de estado estacionário. Nesse sentido, os resultados apontaram ser razoável supor que nossa variável de estado tenda a zero no longo prazo, permitindo assim encontrar a trajetória de solução de forma mais rápida e prática.

A Tabela 1 sintetiza todos os resultados anteriores.

Tabela 1

Comparativo entre os problemas propostos

	Problema	Solução	Variáveis endogenamente determinadas
Modelo-base	Minimizar $\Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt$ Sujeito a $\pi(0)=\pi_0 \quad (\pi_0>0)$ $\pi(T)=0 \quad (T \text{ dado})$	$A_1=\frac{-\pi_0 e^{r_2T}}{e^{r_1T}-e^{r_2T}}$ $A_2=\frac{\pi_0 e^{r_1T}}{e^{r_1T}-e^{r_2T}}$	–
Linha terminal horizontal	Minimizar $\Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt$ Sujeito a $\pi(0)=\pi_0 \quad (\pi_0>0)$ $\pi(T)=\pi_T \quad (\pi_T<\pi_0, T \text{ livre}, \pi_T \text{ dado})$	$A_1=\frac{-\pi_0(r_2-\sigma)e^{r_2T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}}$ $A_2=\frac{\pi_0(r_1-\sigma)e^{r_1T}}{(r_1-\sigma)e^{r_1T}-(r_2-\sigma)e^{r_2T}}$	$T^* \cong \frac{\ln\left[\frac{\pi_0(\rho^2+4\Omega)^{1/2}}{\pi_T(r_1-\sigma)}\right]}{(r_1-\rho)}$
Linha terminal vertical	Minimizar $\Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt$ Sujeito a $\pi(0)=\pi_0 \quad (\pi_0>0)$ $\pi(T)=\pi_T \quad (\pi_T \text{ livre, T dado})$	$A_1=\frac{-\pi_0(r_2+\theta)e^{r_2T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}$ $A_2=\frac{\pi_0(r_1+\theta)e^{r_1T}}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}$	$\pi^*(T)=$ $\frac{1}{(r_1+\theta)e^{r_1T}-(r_2+\theta)e^{r_2T}}$ $\left[e^{\rho T}\pi_0(\rho^2+4\Omega)^{1/2}\right]$
Ponto terminal livre e tempo final livre	Minimizar $\Lambda[\pi]=\int_0^T \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt$ Sujeito a $\pi(0)=\pi_0 \quad (\pi_0>0)$ $\pi(T)=\pi_T \quad (\pi_T \text{ livre}, T \text{ livre})$	$A_1=\frac{-\pi_0 e^{r_2T}}{e^{r_1T}-e^{r_2T}}$ $A_2=\frac{\pi_0 e^{r_1T}}{e^{r_1T}-e^{r_2T}}$	Não foi possível
Horizonte de planejamento infinito	Minimizar $\Lambda[\pi]=\int_0^\infty \lambda(\pi,\pi')e^{-\rho t}dt$ Sujeito a $\pi(0)=\pi_0 \quad (\pi_0>0)$	$A_1=0$ $A_2=\pi_0$	$\lim_{t\to\infty}\pi(t)=0$

Fonte: Elaborada pelos autores.

TRADING OFF INFLATION AND UNEMPLOYMENT: AN ANALYSIS OF DIFFERENT TRANSVERSALITY CONDITIONS APPLIED OVER AN ADAPTED VERSION OF TAYLOR'S MODEL

Abstract

The objective of this paper is to analyze the effects of different transversality conditions applied over an adapted version of Taylor's (1989) inflation and unemployment model. The transversality conditions arise when we modify the approach of the basic model, more precisely when we set free the boundary conditions. In this sense, we propose four different approaches: horizontal terminal line (a free terminal time), vertical terminal line (a free terminal state), terminal time and terminal state both free, and infinite planning horizon. The results shows that, except in one case, the transversality conditions eventually change the original results, which suggests that, depending on how we set the problem, we can actually answer different questions regarding policy formulations.

Keywords: Transversality conditions; Inflation-unemployment trade-off; Taylor's model.

Referências

BLANCHARD, O. *Macroeconomia*. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

CAGAN, P. *The monetary dynamics of hyperinflation*. Studies in the Quantity Theory of Money. Chicago: University of Chicago Press, 1956. p. 25-117.

CHIANG, A. C. *Elements of dynamic optimization*. Illinois: Waveland Press, 2000.

DORNBUSCH, R. Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy*, v. 84, n. 6, p. 1161-1176, 1976.

FRIEDMAN, M. The role of monetary policy. *American Economic Review*, v. 58, n. 1, p. 1-21, 1968.

FROYEN, R. T. *Macroeconomia*. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

KAMIEN, M. S.; SCHWARTZ, N. L. *Dynamic optimization*: the calculus of variations and optimal control in economics and management. 2. ed. Illinois: Elsevier, 2000.

MANKIW, N. G. *Introdução à economia*. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2001.

MARQUES, M. S. B. Uma resenha das trajetórias de inflação. *Revista Brasileira de Economia*, v. 41, n. 2, p. 185-224, abr./jun. 1987.

ROGOFF, K. S. Dornbusch's overshooting model after twenty-five years. *IMF Working Paper*, v. 49, p. 1-34, Feb. 2002.

SICSÚ, J. Teoria e evidências do regime de metas inflacionárias. *Revista de Economia Política*, v. 22, n. 1, p. 23-33, jan./mar. 2002.

STIGLITZ, J. E.; WALSH, C. E. *Introdução à macroeconomia*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2003.

TAYLOR, D. Stopping inflation in the Dornbusch model: optimal monetary policies with alternative price-adjustment equations. *Journal of Macroeconomics*, v. 11, n. 2, p. 199-216, 1989.

TAYLOR, J. B. The role of expectations in the choice of monetary policy. In: *Monetary Policy Issues in the 1980s*. Kansas: Federal Reserve Bank of Kansas City, 1982.