

VALOR E CAPITAL: UMA REVISITA A HICKS

VALUE AND CAPITAL: A REVISITING THE HICKS

Regis Santos Mateus

Mestre em Economia pela Universidade Federal de Sergipe (UFS). Pesquisador-membro do grupo de pesquisa em Economia, Matemática e Finanças da Universidade Federal de Sergipe (UFS).

E-mail: regis.mateus@bol.com.br

Fábio Rodrigues de Moura

Mestrando em Economia pela Universidade de Pernambuco (UFPE).

E-mail: fabiromash@yahoo.com.br

Tácito Augusto Farias

Doutor em Ciências pela Universidade de São Paulo (USP). Professor e pesquisador-líder do grupo de pesquisa em Economia Matemática e Finanças da Universidade Federal de Sergipe (UFS).

E-mail: tacitoaugusto@yahoo.com.br

Resumo

Este artigo discute as principais contribuições do Prêmio Nobel em Economia John Richard Hicks com base em sua obra *Value and capital*, publicada em 1939. A unidade de método alcançada por suas análises de forma diagramática, sem prejuízo de seu brilhantismo matemático, imprime investigações e inovações relevantes na Teoria da Demanda do Consumidor e, em bases mais amplas, na Teoria do Equilíbrio Geral. O desenvolvimento da ideia de Taxa Marginal de Substituição, a influência do efeito-renda na demanda, o conceito de complementaridade e a integração da Teoria Dinâmica com o método da estática comparativa são alguns dos tópicos que integram o conjunto de *insights* hicksianos na Teoria Econômica.

Palavras-chave: Equilíbrio geral; Utilidade; Indiferença.

Abstract

This article discusses the main contributions of the Nobel Prize in Economics John Richard Hicks from his book *Value and capital*, published in 1939. The unity achieved by his method of analysis diagrammatic form, notwithstanding his mathematical brilliance, prints investigations and relevant innovations in the Theory of Consumer Demand, and on a broader basis in General Equilibrium Theory. The development of the idea of Marginal Rate of Substitution, the influence of income effect on demand, the concept of complementarity and integration of Theory with the Dynamic method of comparative statics are some of the topics that comprise the set of insights hicksians in Economic Theory.

Keywords: General equilibrium; Utility; Indifference.

1

INTRODUÇÃO

Formalmente, a economia neoclássica vinculava-se (e assim permanece) com a presença de três elementos:

1. utilização do reducionismo no sentido de focalizar as explicações para os fenômenos econômicos com base na ação de agentes individuais;
2. utilização das normas de racionalidade;
3. crença de que a noção de equilíbrio é exigida e que o estudo dos estados de equilíbrio é útil.

O conceito de equilíbrio está presente em todo modelo microeconômico e representa o referencial definicional principal da Teoria do Equilíbrio Geral, isto é, balanceamento de forças. Três problemas relevantes revelam-se: existência do equilíbrio; unicidade do equilíbrio; estabilidade do equilíbrio.

Nos momentos de reflexão nos anos 1930, era esse o cenário visualizado por Hicks que resultou na elaboração de dois trabalhos fundamentais (em 1934 e 1939) – estes tratavam explicitamente da Teoria do Equilíbrio Geral, preenchendo uma lacuna a respeito dos estudos de equilíbrio geral em uma visão walrasiana.

Hicks (1939) busca resolver problemas econômicos simples e complexos, baseando-se na aplicação e na utilização sistemática de diagramas e evitando o uso de elementos matemáticos avançados. Desse modo, um problema simples de duas ou três variáveis pode ser resolvido mediante diagramas geométricos. No entanto, quando o problema se torna mais complexo, o método geométrico torna-se insuficiente, e surge a necessidade de se recorrer à álgebra. O método elaborado, embora tenha recorrido à matemática, torna possível a explicação e a utilização apenas com o uso sistemático de diagramas. Foi justamente a esse tipo de abstração teórica que Hicks (1939) atribui à sua obra, *Value and capital*, uma unidade de método.

Para atingir essa unidade de método, Hicks considera como relevante estudar as inter-relações dos mercados no intuito de identificar uma técnica apropriada a ser aplicada nas análises dessas mesmas inter-relações. Nesse sentido, atribui importância ao método de equilíbrio geral – desenvolvido por Walras (1996), Pareto (1984; 1988) e Wicksell (1985) – ponto de partida para o es-

tudo das inter-relações de mercado como um modelo complexo inserido no sistema econômico como um todo. Embora Hicks tenha considerado incompletos os trabalhos desenvolvidos por esses autores ou com lacunas carentes de preenchimento, assinala que importantes contribuições foram deixadas no âmbito da Teoria do Equilíbrio Geral.

No desenvolvimento de seu método de análise, Hicks parte da Teoria do Valor de Marshall (1982) e reconsidera a teoria de Pareto (1984; 1988), tentando preencher os pontos falhos e aplicando a Teoria do Valor aperfeiçoada aos problemas dinâmicos de capital. No tocante aos problemas dinâmicos, ele considera os trabalhos desenvolvidos por Wicksell (1985), porém a maior influência é, sem dúvida, keynesiana; ao dispensar pressupostos especiais, procura entender por que Keynes chega a resultados distintos de economistas anteriores em questões cruciais da política social, examinando sob diversos ângulos e formando opiniões próprias.

A genialidade hicksiana destacada no *Value and capital* também apresenta limitações de análise que estão assinaladas em três principais pontos:

1. O estudo é conduzido supondo uma condição perfeita de concorrência.
2. Esse trabalho refere-se à economia teórica como análise lógica de um sistema econômico de iniciativa privada, sem nenhuma referência aos controles institucionais.
3. Trata o problema da estabilidade em mercado competitivo múltiplo em um sentido muito restrito, a estabilidade local; desse modo, não leva em consideração a necessidade de explicar que qualquer que seja o estado inicial da economia, ela tenderia ao equilíbrio, prevalecendo considerações estáticas. O conceito de estabilidade estática walrasiana é generalizada para o caso de mercado múltiplos, ou seja, para situações de equilíbrio, por Hicks (1939) em *Value and capital*.

Quanto ao mercado único, sabe-se que a estabilidade de Walras (1996) procede se, a preços acima do preço de equilíbrio, o excesso da demanda é negativo (oferta excede demanda) e, se a preços abaixo do preço de equilíbrio, o excesso da demanda é positivo (demanda excede oferta). Para Hicks (1939), no caso de mercados múltiplos, os efeitos de uma mudança de preço de uma mercadoria sobre os preços de outras mercadorias na situação de equilíbrio geral são levados em consideração.

Assim sendo, com o propósito de desenvolver o conteúdo analítico da estabilidade em mercados múltiplos em Hicks (1939), procede-se de modo a definir alguns instrumentos de análise considerados fundamentais para a compreensão das condições de estabilidade.

2

CONSIDERAÇÕES HICKSIANAS NA TEORIA DA DEMANDA

2.1 Contribuições de Marshall e Pareto, segundo Hicks

Para Hicks, o Livro Terceiro dos *Principles* de Marshall ainda é a última palavra no tocante à teoria pura da demanda. A ideia básica do principal argumento de Marshall é que o consumidor obtém muita utilidade dos bens que compra (sendo a utilidade uma função das quantidades de bens adquiridos) e que ele vai gastar sua renda de modo a conseguir o máximo possível de utilidade. Mas a utilidade é maximizada quando a unidade marginal de dispêndio em cada direção trazer o mesmo incremento de utilidade.

Assim, o argumento de Marshall se baseia na ideia de maximização da utilidade total, está de acordo com a lei da utilidade marginal decrescente e formula a interpretação de que as utilidades marginais das várias mercadorias compradas devem ser proporcionais a seus preços. Apesar disso, Hicks afirma que Marshall não esclarece a contento as bases da lei da utilidade marginal decrescente, assim como não explora de modo detalhado o próprio conceito de utilidade e sua maximização.

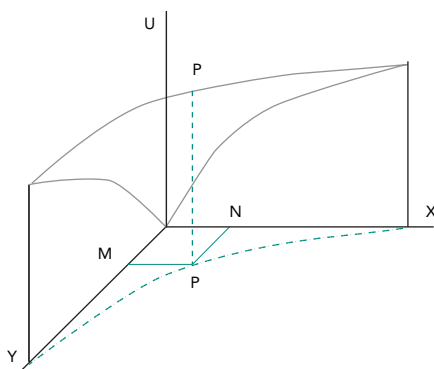
Hicks (1939) reconsidera o trabalho desenvolvido por Pareto, atribuindo a este o marco que separa o princípio de utilidade cardinal (consolidado por Marshall) do princípio de utilidade ordinal. Em *Manuel d'Économie Politique*, ao tratar da Teoria do Equilíbrio Geral, Pareto (1996) traz como sua principal contribuição na Teoria da Utilidade o problema dos bens relacionados – complementares ou concorrentes – ampliando e revolucionando a análise marshalliana. Adotou um artifício geométrico de Edgeworth: a curva de indiferença.

Em suas análises, Marshall (1982), utiliza apenas uma mercadoria, medindo as quantidades dessa mercadoria ao longo de um eixo, e as quantidades totais de utilidade derivadas das diversas quantidades de mercadorias ao lon-

go do outro eixo. Pareto, ao medir as quantidades de dois bens X e Y ao longo de dois eixos horizontais, obtém um diagrama em que um ponto P representa o conjunto de determinadas quantidades. Partindo desse ponto, obtém-se de início um diagrama tridimensional e, posteriormente, retorna-se para um diagrama bidimensional com linhas de contorno da superfície de utilidade, ou seja, as curvas de indiferença.

Gráfico 1

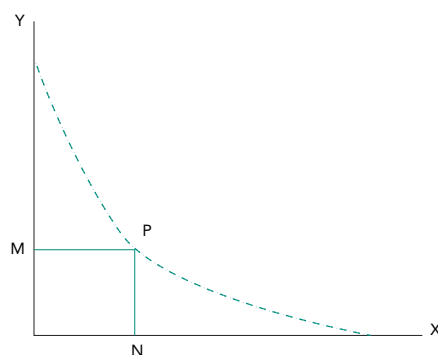
Modelo tridimensional



Fonte: Elaborado pelos autores.

Gráfico 2

Modelo bidimensional



Fonte: Elaborado pelos autores.

2.2 Diferenças entre as teorias de Marshall e de Pareto

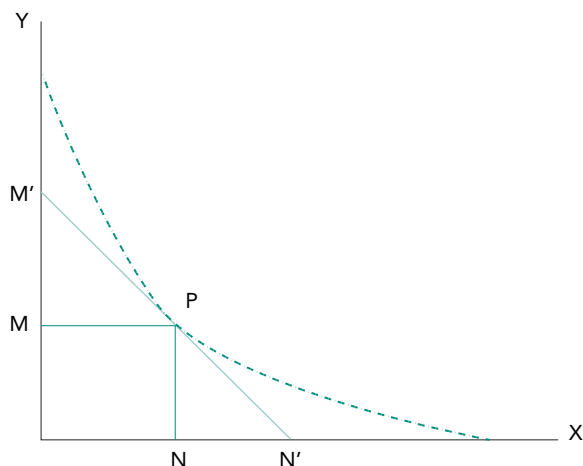
Segundo Hicks (1939), os feitos notáveis de Pareto que o diferenciaram de Marshall e possibilitaram novos resultados de grande significado econômicos foram:

1. A tangência entre a linha de preço e uma curva de indiferença é a expressão, em termos de curvas de indiferença, da proporcionalidade entre as utilidades marginais e os preços (Gráfico 3). Matematicamente, tem-se a seguinte representação:

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{P_X} = \frac{\frac{\partial U}{\partial Y}}{P_Y} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{P_X}{P_Y}$$

Gráfico 3

Interseção entre curva de indiferença e linha de preço no modelo bidimensional



Fonte: Elaborado pelos autores.

2. Para determinar as quantidades de bens que um indivíduo compra por determinados preços, a teoria de Marshall implica o conhecimento de sua superfície de utilidade; a teoria de Pareto implica o conhecimento de seu mapa de indiferença.
3. O mapa de indiferença proporciona menos informações que a superfície de utilidade (apenas diz que o indivíduo prefere um determinado conjunto de mercadorias a outro); a superfície de utilidade se propõe a mostrar quanto do primeiro conjunto é preferido em relação ao segundo.
4. Na teoria de Marshall (1982), “determinadas necessidades” significam uma determinada função de utilidade, uma determinada intensidade do desejo por qualquer conjunto particular de bens. Na teoria de Pareto (1984), deduz-se que essa suposição não é necessária, pois “determinadas necessidades” é algo que se pode definir adequadamente como uma determinada escala de preferências. Para Pareto (1984), o conceito quantitativo de utilidade não é necessário para explicar os fenômenos do mercado, apenas é necessário supor que o consumidor tem preferência por um determinado conjunto de bens.

■ 2.3 Construção da Teoria da Demanda hicksiana

Em uma tentativa de elaborar uma teoria completa da demanda do consumidor (ou pelo menos tão abrangente quanto a de Marshall), Hicks parte de uma escala de preferências, ou seja, adota apenas o mapa de indiferença como ponto de partida. Para ele, embora Pareto tenha estabelecido sua grande posição, continua usando conceitos derivados do antigo conjunto de ideias.

2.3.1 Origem e importância da Taxa Marginal de Substituição

Hicks (1939) parte apenas do mapa de indiferença, rejeita todos os conceitos contaminados pela utilidade quantitativa e os substitui por conceitos que não tenham essa implicação. Os conceitos rejeitados e substituídos foram:

1. Utilidade marginal: se a utilidade total é arbitrária, a utilidade marginal também o é. Mas, quando as quantidades possuídas de ambas as mercadorias estão dadas, a razão entre duas utilidades marginais possui um significado preciso; pois essa razão é representada pela inclinação de uma curva de indiferença, não sendo, portanto, arbitrária. A essa razão, Hicks (1939) atribui a denominação de Taxa Marginal de Substituição (TMS) entre duas mercadorias; a TMS representa a quantidade de Y que compensaria perfeitamente o consumidor pela perda de uma unidade marginal de X. Para o autor, essa definição está inteiramente livre de qualquer dependência de uma medida quantitativa de utilidade.
2. Neste ponto, Hicks (1939) acrescenta que a condição de equilíbrio no mercado se dá no momento em que a TMS entre duas mercadorias quaisquer é igual à razão entre seus preços. Sabendo-se que o consumidor é indiferente nas diversas cestas de mercadorias localizadas em uma mesma curva de indiferença, tem-se que a função utilidade pode ser representada da seguinte forma: $U(X,Y) = c$, em que c é uma constante.

Aplicando-se as técnicas de diferenciação, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X} \times dX + \frac{\partial U}{\partial Y} \times dY = 0 & \therefore \frac{\partial U}{\partial Y} \times dY = -\frac{\partial U}{\partial X} \times dX \therefore \\ \therefore \frac{dY}{dX} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} & \therefore TMS = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{dY}{dX} \end{aligned}$$

3. Princípio da utilidade marginal decrescente: se a U_{mg} não tem um sentido exato, a U_{mg} decrescente também não. Assim, substitui o princípio da U_{mg} decrescente pelo princípio da Taxa Marginal Decrescente de Substituição (TMDS), tendo por base a regra que diz que as curvas de indiferença devem ser convexas em relação aos eixos. Para qualquer ponto constituir uma relação possível de equilíbrio aos preços apropriados, a Taxa Marginal de Substituição tem de ser decrescente.

Ao estabelecer o conceito de Taxa Marginal Decrescente de Substituição, Hicks (1939) procura um fundamento mais sólido para esse princípio, pois acredita que os fundamentos que apoiam o princípio geral de utilidade marginal decrescente são duvidosos por se basearem em fatos empíricos de pouca abertura para observações mediante procedimentos científicos.

Em busca de bases mais sólidas, Hicks adota como objetivo a tentativa de deduzir – valendo-se do princípio da TMDS – leis de conduta de mercado, ou seja, leis que tratem desde a reação do consumidor até mudanças nas condições do mercado. Tendo em vista que tais mudanças conduzem o consumidor a um novo ponto de equilíbrio, o autor adota como suposição a inexistência de irregularidades nas curvas entre as duas posições de equilíbrio; pois a condição da TMDS precisa se manter em quaisquer posições de equilíbrio ocupada. A justificativa apresentada por ele é que essa suposição¹, além de ser simples, está fortemente correlacionada com a experiência.

Com o intuito de elaborar uma teoria da escolha econômica em geral com base na análise da escolha do consumidor entre os bens de consumo, Hicks (1939) esclarece os seguintes pontos:

1. Condição de equilíbrio: o consumidor encontra-se em perfeito equilíbrio quando a TMS entre duas mercadorias quaisquer se iguala ao coeficiente de seus preços, ou seja:

$$TMS = -\frac{\frac{\partial U}{\partial X}}{\frac{\partial U}{\partial Y}} = \frac{dY}{dX} = \frac{P_X}{P_Y}$$

1 Refere-se à suposição de que “as irregularidades podem ser negligenciadas, de que há uma uniformidade suficiente no sistema de necessidades em consonância com quaisquer quantidades próximas de uma possível posição de equilíbrio em determinados sistemas de preços” (HICKS, 1934, p. 29).

Embora essa condição esteja em consonância com a estrutura da escala de preferências de Pareto, adiciona à definição da TMS a condição de que as quantidades consumidas de todas as outras mercadorias permanecem inalteradas. Com isso, procura corrigir um dos principais defeitos da técnica da curva de indiferença, referente à simplificação da escolha do consumidor sob a restrição de dois tipos de mercadorias.

2. Estabilidade do equilíbrio: a Taxa Marginal de Substituição entre mercadorias deve ser decrescente, a fim de evitar que o consumidor assuma uma posição preferencial, tendo em vista a decisão de distribuir a receita entre muitas mercadorias e devendo regular as possíveis substituições de valores iguais de mercadorias.
3. Hipótese básica de regularidade: supõe que a TMS diminui em qualquer direção de qualquer posição.

2.3.2 Efeitos da renda sobre a demanda

A dedução da inclinação descendente da curva de demanda, na teoria de Marshall, se dá tomando-se por base a lei da utilidade marginal decrescente, com a suposição de que a utilidade marginal do dinheiro seja constante. Se a utilidade marginal do dinheiro for constante, alterações na oferta de dinheiro do consumidor (ou mudanças na renda do consumidor) não causarão qualquer efeito na demanda.

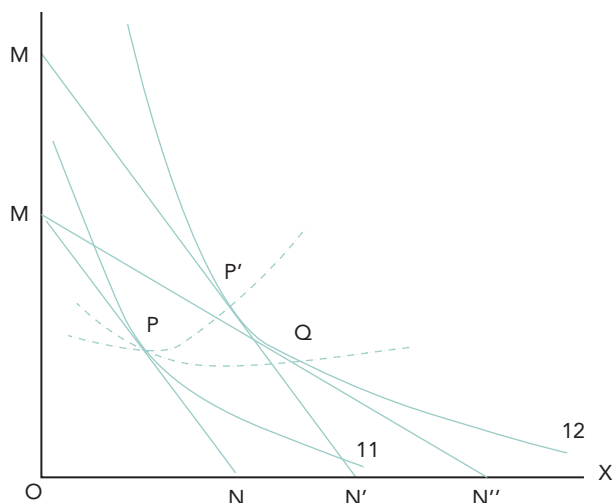
Com o intuito de identificar as variações das quantidades compradas diante de mudanças nos preços, Hicks (1939) conduz suas investigações em torno das condições que determinam as quantidades compradas por determinados preços. Percebe-se, nas deduções de Hicks, que Marshall não atribui a devida importância no que se refere aos efeitos de mudanças da renda sobre a demanda. A fim de esclarecer as relações entre demanda, preço e renda, Hicks (1939) tece suas análises sob dois aspectos:

1. Efeito de mudanças na renda: considera duas mercadorias distintas nos quais os preços são dados e a renda do consumidor varia, dando origem à curva de renda-consumo;
2. Efeito de mudanças nos preços: considera duas mercadorias distintas nos quais a renda é considerada fixa e o preço de uma delas também é considerado fixo, enquanto o preço da outra mercadoria é variável, dando origem à curva de preço-consumo.

Supondo-se uma redução no preço de uma determinada mercadoria, o efeito total sobre a demanda dessa mercadoria é representado pela soma de duas tendências. A primeira é representada pela elevação da renda real do consumidor e, por esse motivo, assemelha-se a um aumento da renda. A segunda tendência é representada pela substituição de outras mercadorias pela mercadoria de preço inferior, tendo em vista que a redução do preço altera os preços relativos (Gráfico 4).

Gráfico 4

Efeito total sobre a demanda da mercadoria X (efeito renda + efeito substituição)



Fonte: Elaborado pelos autores.

Arelado ao efeito-renda e ao efeito-substituição, um importante fator nesta análise diz respeito à proporção da renda do consumidor destinada para a mercadoria cujo preço é variável, além da proporção dessa mesma renda para outros bens. Se a proporção da renda for alta para a mercadoria cujo preço é variável em relação às demais, o efeito-renda terá peso considerável na análise das relações entre demanda, preço e renda; todavia, se a proporção dessa renda para a mercadoria em questão for pequena, o efeito-substituição tenderá a sobrepor-se ao efeito-renda.

Nesse ponto, a grande contribuição de Hicks foi o estabelecimento das bases do princípio da Taxa Marginal Decrescente de Substituição e a sofisticação da lei da demanda até então predominante pelo princípio da utilidade marginal de Marshall. Tomando-se por base o efeito-substituição, torna-se compreensível que – diante de uma diminuição do preço de uma determinada mercadoria – se tenha um aumento da demanda dessa mercadoria. Já o efeito-renda, além de depender da proporcionalidade da renda para determinada mercadoria, pode funcionar de modo oposto no caso dos bens inferiores, ou seja, a curva de renda-consumo poderá ser tanto positivamente inclinada quanto negativamente inclinada.

Além disso, a aplicação do raciocínio geométrico para duas mercadorias também pode ser estendido para uma aplicação mais geral, considerando-se que estejam envolvidas nesta análise duas grandezas: uma delas representada por uma mercadoria física e a outra, pelo poder de compra em geral, ou seja, mediante o estabelecimento de um sistema de indiferença entre qualquer mercadoria e a distribuição do poder de compra entre outras mercadorias (dinheiro).

Hicks (1939) considera que as análises inerentes à demanda individual são apenas um meio para a investigação no campo da demanda de mercado e que as propriedades estabelecidas pela demanda de mercado assemelham-se às da demanda individual. Desse modo, tece as seguintes deduções:

1. Se existirem efeitos-substituição individuais que conduzem a um aumento do consumo de determinada mercadoria quando o preço diminui, então o efeito-substituição conjunto (que representa a soma dos efeitos-substituição individuais) tenderá a operar da mesma forma.
2. Se a direção dos efeitos-renda individuais for incerta, a direção dos efeitos-renda conjunto tenderá a ser incerta.
3. Se os efeitos-renda individuais forem desprezíveis (considerando-se a proporção da renda gasta com determinada mercadoria quando seu preço varia), então poderá se supor que o efeito-renda conjunto também será desprezível.

Embora Hicks tenha chegado a deduções de grande relevância sobre a lei da demanda e que o auxiliariam em etapas futuras de investigação, afirma que não é neste campo que o desenvolvimento de sua técnica de análise se concentra ou apresenta conclusões realmente inovadoras. Atribui à lei da demanda um tipo de funcionamento quase infalível, pois a inclinação para baixo da

curva de demanda de determinada mercadoria sugere um aumento de consumo quando o preço cai, considerando-se que não seja um bem inferior. Todavia, mesmo sendo um bem inferior, deve-se atender à condição na qual a proporção da renda gasta com a mercadoria em questão seja grande e que o efeito-renda negativo não seja contrabalançado pelo efeito-substituição.

Exceção a essa análise pode ser atribuída ao caso Giffen, em que os consumidores atribuem proporção de suas rendas a um bem inferior que atende a determinadas necessidades de enorme relevância. Diante de uma elevação da renda real (ou da redução do preço desse bem) os consumidores tendem a substituir esse bem por outras mercadorias mais atraentes, reduzindo sua demanda; portanto, o efeito-renda negativo supera o efeito-substituição.

Na análise do funcionamento ortodoxo da lei da demanda, as contribuições inseridas nesse campo por Hicks procuram atingir também aspectos relacionados à oferta de mercadorias. O efeito-substituição e o efeito-renda assumem importância crucial na análise do equilíbrio em situações de demanda do consumidor. Da mesma forma, quando o consumidor assume uma condição de vendedor e está diante do mercado com um nível de renda variável em termos de dinheiro e com um estoque fixo de determinada mercadoria, o efeito-substituição e o efeito-renda tornam-se extremamente relevantes nesta análise.

Segundo Hicks (1939), a menos que seja um bem inferior, no caso do vendedor o efeito-renda e o efeito-substituição normalmente atuam em direções opostas. O efeito-renda torna-se tão importante quanto o efeito-substituição ou até mesmo o sobrepõe. Desse modo, para uma redução no preço de determinada mercadoria, a curva de oferta pode ser ascendente e/ou descendente; a existência da curva de oferta torna-se evidente sempre que seja identificada reserva de demanda, ou seja, a decisão do vendedor em ofertar menos mercadorias, evidenciando a existência de assimetria entre oferta e demanda e a necessidade de se esclarecer as razões dessa assimetria.

■ 2.4 O conceito de complementaridade de Hicks

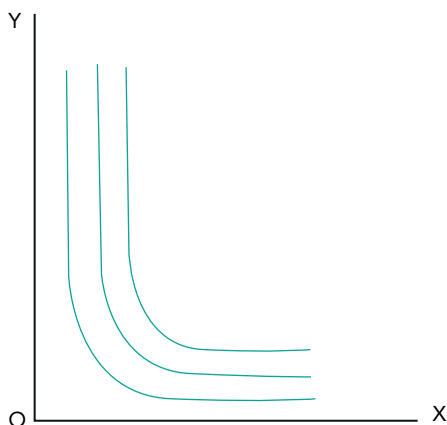
Hicks (1939) afirma que a definição de bens complementares e concorrentes (substitutos) dada por Edgeworth-Pareto não apresentam clareza e consistência, além de contradizer o princípio da imensurabilidade da utilidade de Pareto. Na definição de Edgeworth-Pareto, um bem Y é complementar a X se um aumento na oferta de X (sendo Y constante) eleva a U_{mg} de Y e, portanto, aumenta a demanda de Y. Um bem Y é concorrente ou substituto de X se um

aumento na oferta de X (sendo Y constante) diminui a Umg de Y e, portanto, reduz a demanda de Y.

As dificuldades surgem, primeiramente, pela impossibilidade de se distinguir bens complementares de concorrentes, considerando-se o grau de curvatura das curvas de indiferença apresentadas por Pareto (1988), conforme demonstram os gráficos 5 e 6.

Gráfico 5

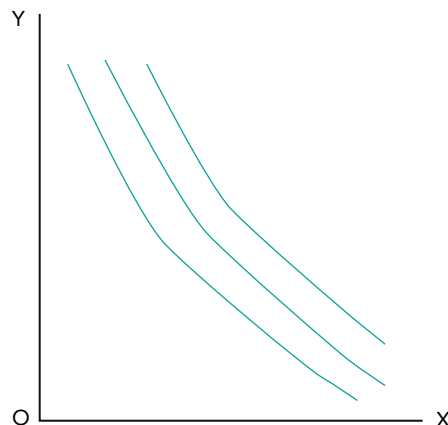
Paralelismo inexato entre curvas de indiferença e bens complementares



Fonte: Elaborado pelos autores.

Gráfico 6

Paralelismo inexato entre curvas de indiferença e bens concorrentes



Fonte: Elaborado pelos autores.

Em segundo lugar, o princípio da imensurabilidade de Pareto afirma que a utilidade é representada por um índice da escala de preferência do consumidor e não por medidas quantitativas, dificultando, mais uma vez, a distinção entre bens complementares e concorrentes.

Hicks (1939) tenta superar essas discrepâncias substituindo a definição de Umg de Edgeworth-Pareto pela definição de Taxa Marginal de Substituição por Dinheiro. Segundo Hicks, um bem Y é complementar a X quando se observa um aumento da TMS de Y por dinheiro e quando X é substituído por dinheiro. Um bem Y é considerado substituto de X se a TMS de Y por dinheiro diminui quando X é substituído por dinheiro. Nesta definição de bem complementar e substituto, Hicks faz as seguintes considerações:

1. O dinheiro representa as “outras coisas” com que se gasta a renda.
2. A oferta de dinheiro deverá ser reduzida no intuito de provocar o aumento de X.
3. O consumidor permanecerá na mesma situação de antes.
4. Uma unidade adicional da mesma mercadoria física torna-se um substituto de unidades precedentes.
5. Valendo-se da definição de complementaridade, tem-se um marco que torna possível a distinção e a identificação entre um bem complementar e um tipo contrário ao complementar (substituto), ou seja, existe um limite máximo e um limite mínimo para a complementaridade.

As análises relacionadas aos bens complementares e substitutos, sob essa definição, trazem como resultado as seguintes implicações:

1. Desprendem-se de aspectos mensuráveis (medidas quantitativas).
2. Atendem tanto ao princípio da utilidade marginal do dinheiro constante quanto aos casos de utilidade marginal do dinheiro variável.
3. Mantêm o princípio da reversibilidade entre os bens X e Y, sejam eles complementares sejam substitutos.

Hicks (1939) relaciona a definição de bem complementar e concorrente ao efeito-substituição e ao efeito-renda e chega aos seguintes casos distintos:

1. Alta complementaridade de Y em relação a X: o efeito-substituição tende a sobrepor-se ao efeito-renda, podendo-se observar uma alteração significativa na demanda de Y.
2. Moderada complementaridade de Y em relação a X: o efeito-renda assume importância e tende para a mesma direção do efeito-substituição, desde que Y não seja um bem inferior.
3. Moderada substituição de Y em relação a X: o efeito-renda e o efeito-substituição tendem a anularem-se ou exercem uma alteração muito pequena na demanda de Y; se Y for um bem inferior, sua demanda sofrerá retração.
4. Independência entre os bens X e Y: considerando-se uma alteração no preço de X, tanto o efeito-renda quanto o efeito-substituição sobre a demanda de Y são desprezíveis (ou a diferença entre tais efeitos é desprezível).

Para Hicks (1939), sua teoria de bens complementares e substitutos assume aplicabilidade à medida que pode ser utilizada na análise da demanda de mercado, de forma semelhante à análise da demanda do consumidor individual, considerando-se para esses casos que somente os efeitos-substituição apresentam caráter de reversibilidade². Uma outra importante implicação é que todas as outras mercadorias podem ser tratadas como uma única mercadoria se os preços relativos de um grupo de mercadorias permanecem inalterados. Disso decorre que, em relação à demanda de um grupo de mercadorias, o efeito-renda e o efeito-substituição tendem a assumir a mesma direção, e que os efeitos-renda negativos para um grande grupo de mercadorias são pouco prováveis.

3

UMA DISCUSSÃO DO EQUILÍBRIO GERAL DA TROCA POR HICKS

Após suas contribuições e modificações na Teoria da Demanda do Consumidor, Hicks adentra os estudos relacionados à Teoria da Troca. Até então, a técnica por ele desenvolvida considerava também uma reação dos preços na escala de preferência do indivíduo, mas excluía dois importantes fatores: produção e especulação.

Em relação à produção, Hicks trata especificamente da procura e da oferta de bens por parte de produtores. Considera-se a existência de uma demanda derivada para tais bens de produção por dependerem do preço de seu produto final, ou seja, os produtores não conseguem definir o valor de uma unidade de determinado fator de produção sem antes concretizar a venda do produto e auferir lucros que proporcionem a satisfação de suas necessidades.

No que se refere à especulação, as análises de Hicks se direcionam para as influências das expectativas quanto ao futuro relacionadas ao dinheiro. Nesse

2 Hicks (1939, p. 75) esclarece que “qualquer variação de preços determinará um efeito-renda e um efeito-substituição; quanto ao efeito-renda, nada se pode dizer em geral, mas há algo que em geral se aplica ao efeito-substituição. A mais generalizada mudança de preços estabelece a mudança das demandas na direção oposta. É preciso enfatizar que ela só se aplica a efeitos-substituição; se houver uma mudança na renda real (ou, no caso de um grupo de consumidores, uma mudança na distribuição da renda real), então há também um efeito-renda a considerar, que atuará de acordo com seus próprios princípios”.

sentido, afirma que a Taxa Marginal de Substituição por Dinheiro sofre influência dos preços tendo em vista as expectativas geradas.

Ao tratar da Teoria Geral da Troca, Hicks (1939) recorre a Walras pelo fato de este ter sido o precursor da Teoria do Equilíbrio Geral da Troca. Walras chega à conclusão de que, em um mercado em concorrência perfeita de n mercadorias (em que se admite uma mercadoria-padrão), existe $n-1$ preços das demais $n-1$ mercadorias em termos da mercadoria-padrão; ele elabora um sistema de equações simultâneas para determinar todo um sistema de preços e admite, como condição de equilíbrio em um mercado em concorrência perfeita de troca múltipla, que a taxa cambial de duas mercadorias quaisquer é sempre igual ao coeficiente de seus preços em termos da mercadoria-padrão.

Apesar disso, Hicks considera que Walras não fez um estudo claro e completo do caso geral do mesmo modo que fizera para o caso simples de duas mercadorias, repetindo a análise feita por Marshall. Para Hicks, os motivos dessa esterilidade são: ausência de leis de variação para o Sistema de Equilíbrio Geral; indefinição das condições a serem satisfeitas pelos preços estabelecidos com recursos e preferências preestabelecidas e, posteriormente, quando estes recursos e preferências sofressem alterações.

Hicks acredita que o método do equilíbrio geral ficaria livre de tais dificuldades se houvesse a aplicação da técnica e dos conceitos por ele desenvolvidos, propiciando aplicações especiais como a Teoria Geral do comércio internacional e considerações de análise econômica com a inclusão da produção e da especulação.

4

ESTABILIDADE DO EQUILÍBRIO EM MERCADO MÚLTIPLO

4.1 Conceitos básicos

Primeiro, um mercado é definido como imperfeitamente estável se uma queda no preço de uma mercadoria particular gerar um excesso da demanda para aquela mercadoria, depois que todos os outros preços tiverem se ajustado eles mesmos de modo que a oferta seja de novo igual à demanda em todos os mercados, exceto para aquele da mercadoria particular (Hicks, 1939, p. 62).

Formalmente,

$$\frac{dE_i(P)}{dP_i} = \frac{J}{J_{ii}} < 0 \quad (1)$$

em que J é o determinante jacobiano do sistema completo e J_{ii} é cofator de b_{ii} (matrix dos coeficientes dos preços).

Uma aplicação direta facilita a compreensão do conceito. Suponha que exista uma economia cuja representação é dada pelas equações abaixo:

$$\begin{cases} E_2 = 3P_2 + 4P_3 - 17 \\ E_3 = P_2 + P_3 - 5 \end{cases}$$

$$\frac{dE_2}{dP_2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{3-4}{1} = \frac{(-1)}{1} = -1 < 0$$

$$\frac{dE_3}{dP_3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-4}{3} = \frac{(-1)}{3} = \frac{1}{-3} < 0$$

Segundo, um mercado é definido como perfeitamente estável se uma queda no preço abaixo do preço de equilíbrio gerar um excesso da demanda, depois que qualquer dado subconjunto de preços em outros mercados for ajustado de modo que a oferta de novo se iguale à demanda, com todos os outros preços restantes mantidos constantes (HICKS, 1939, p. 62). Formalmente,

$$\frac{dE_j}{dP_j} = b_{jj} < 0 \quad (2)$$

em que b_{jj} são coeficientes do sistema completo.

Introduz-se um exemplo numérico. Imagine uma economia que possui três mercadorias representadas pelas funções excesso da demanda descrita a seguir:

$$\begin{cases} E_2 = -P_2 + 3P_3 - 5 \\ E_3 = P_2 - P_3 - 1 \end{cases}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial P_2} = -1 < 0$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial P_3} = -1 < 0$$

De acordo com as definições acima, fica estabelecido o resultado: se cada mercado único é estável, o sistema econômico inteiro é dinamicamente estável. A validade do teorema está ligada diretamente às condições necessárias e suficientes para a existência da estabilidade perfeita.

Satisfeitas as duas condições para estabilidade perfeita hicksiana, equação (1) e equação (2), afirma-se que o sistema possui estabilidade verdadeira.

Suponha que todas as funções excesso da demanda são contínuas e diferenciáveis. Com efeito, dado

$$\begin{cases} E_2 = E_2 (P_2, \dots, P_n) \\ E_n = E_n (P_2, \dots, P_n) \end{cases}$$

e diferenciando totalmente cada função excesso da demanda com respeito a P_2 (todos os preços que não P_2 mantidos constantes), obtém-se

$$\begin{cases} \frac{dE_2}{dP_2} = \frac{\partial E_2}{\partial P_2} \cdot \frac{dP_2}{dP_2} + \dots + \frac{\partial E_2}{\partial P_n} \cdot \frac{dP_n}{dP_2} \\ \frac{dE_n}{dP_2} = \frac{\partial E_n}{\partial P_2} \cdot \frac{dP_2}{dP_2} + \dots + \frac{\partial E_n}{\partial P_n} \cdot \frac{dP_n}{dP_2} \end{cases}$$

ou na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dE_2}{dP_2} \\ \frac{dE_n}{dP_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_2}{\partial P_2} & \frac{\partial E_2}{\partial P_n} \\ \frac{\partial E_n}{\partial P_2} & \frac{\partial E_n}{\partial P_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dP_2}{dP_2} \\ \frac{dP_n}{dP_2} \end{bmatrix}$$

Onde cada derivada parcial está sendo avaliada no conjunto dos preços de equilíbrio

$$\begin{aligned} \frac{dP_i}{dP_2} = 0 & \quad \text{se} \quad \frac{dE_i}{dP_2} \neq 0 \\ \frac{dE_i}{dP_2} = 0 & \quad \text{se} \quad \frac{dP_i}{dP_2} \neq 0 \end{aligned}$$

Para $i \in \{ 2, \dots, n \}$. Significa dizer que se ignoram os efeitos sobre todos os outros preços de uma mudança em P_2 . Assim sendo,

$$\frac{dE_2}{dP_2} = E_{22}$$

e, de acordo com a condição de estabilidade perfeita, tem-se

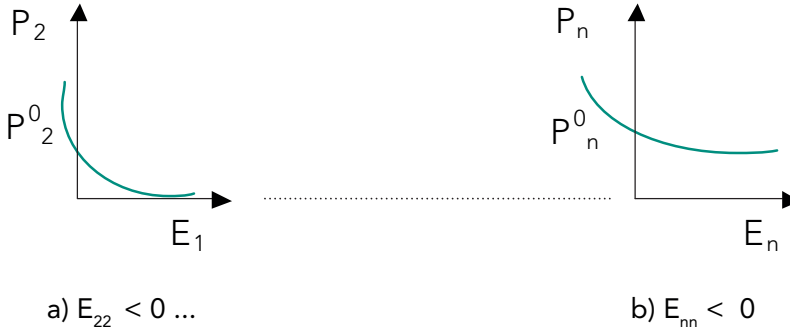
$$\frac{dE_2}{dP_2} < 0$$

O que implica $E_{22} < 0$.

Renumerando as mercadorias, conclui-se que estabilidade perfeita exige que $E_{ii} < 0, \forall_i$. Significa dizer, geometricamente, que a curva agregada de excesso da demanda para cada mercadoria deve ser decrescente, conforme indica a Figura 1.

Figura 1

Funções excesso da demanda



Fonte: Elaborada pelos autores.

4.2 Teoremas fundamentais

Dando sequência ao procedimento acima, é estabelecido o resultado fundamental:

Teorema 1 O sistema econômico é considerado perfeitamente estável se e somente se os menores principais da matriz $[E_{ij}]$ alternam em sinal. Apresenta-se abaixo as condições referentes a uma economia com três mercadorias, em que uma delas é o numerário: sistema normalizado. [Demonstração incluída no Apêndice 1.]

$$b_{22} = \frac{\partial E_2}{\partial P_2} < 0$$

$$b_{33} = \frac{\partial E_3}{\partial P_3} < 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial E_2}{\partial P_2} & \frac{\partial E_2}{\partial P_3} \\ \frac{\partial E_3}{\partial P_2} & \frac{\partial E_3}{\partial P_3} \end{vmatrix} > 0$$

Um exercício numérico é ilustrado em detalhe para servir como material de apoio à compreensão do resultado estabelecido.

Suponha uma economia que possui funções excesso da demanda descritas:

$$\begin{cases} E_2 = -3P_2 + 4P_3 - 5 \\ E_3 = 4P_2 - 6P_3 + 4 \end{cases}$$
$$E = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \quad b_{22} = -3 < 0 \quad e \quad b_{33} = -6 < 0$$
$$= 18 - 16 = 2 > 0 \quad \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$$

E conclui-se que o sistema seja perfeitamente estável.

Para o professor Hicks (1939), no sistema econômico abstrato a única fonte possível de instabilidade no mecanismo competitivo é a ocorrência do efeito-renda assimétrico. Com efeito, prova o teorema seguinte:

Teorema 2 Os menores principais da matriz $[E_{ir}]$ $i, r \in \{1, \dots, n\}$ alteram em sinal se efeitos-renda são simétricos em relação aos consumidores. [Demonstração incluída no Apêndice 2] (FARIAS, 2004).

5

COMENTÁRIOS

As principais contribuições de Hicks no desenvolvimento da Teoria Econômica, com base na obra *Value and capital*, assentam-se em uma metodologia descritiva de construção diagramática. Embora apresente uma análise da superfície de utilidade marshalliana e suas implicações nas condições de equilíbrio econômico, considera como verdadeiro ponto de partida o mapa de indiferença oriundo das investigações paretianas, no intuito de evitar contaminações provenientes das hipóteses subjacentes à Teoria da Utilidade Cardinal.

O desenvolvimento teórico da ideia de Taxa Marginal de Substituição tornou-se fato notório e essencial nas análises hicksianas. E os avanços na Teoria do Equilíbrio Geral tiveram como mediadores principais:

1. a identificação da negligência marshalliana no tocante à influência da renda na Teoria da Demanda do Consumidor;
2. o desenvolvimento do conceito de complementaridade como forma de atribuir graus de complementaridade ou substitutibilidade;
3. a inclusão da influência do processo produtivo e especulativo na Teoria da Demanda.

O trabalho do professor Hicks (1939) a respeito da estabilidade do equilíbrio competitivo forneceu valiosas contribuições ao conteúdo analítico, destacando-se a integração da Teoria Dinâmica com o método da estática comparativa, o que significa dizer que estática comparativa não teria significância em Teoria Econômica, a menos que o sistema econômico fosse dinamicamente estável. Por conseguinte, a inovação fundamental devida ao professor Hicks consistiu na derivação das propriedades do sistema de equilíbrio tomando-se por base as condições de estabilidade de um sistema dinâmico correspondente.

Primeiro, as condições de estabilidade hicksiana forneciam um conjunto de condições de estabilidade que eram independentes da velocidade de resposta dos preços individuais a diferenças entre oferta e demanda.

Segundo, em uma certa classe de sistemas de mercados, estabilidade perfeita hicksiana representa a condição necessária e suficiente para estabilidade dinâmica verdadeira, ou seja, estabilidade dinâmica de primeira espécie. Ilustra-se o presente resultado por meio de um exercício numérico. Suponha uma economia constituída por funções excesso da demanda para três mercadorias:

$$\begin{cases} E_2 = -4P_2 - 6P_3 - 24 \\ E_3 = 8P_2 - 16P_3 - 64 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 \quad b_{22} &= -4 < 0 \\ b_{33} &= -16 < 0 \end{aligned}$$

$$2 \quad \begin{vmatrix} -4 & -6 \\ 8 & -16 \end{vmatrix} = 112 > 0$$

Satisfeitas as duas condições para estabilidade perfeita hicksiana, afirma-se que o sistema possui estabilidade dinâmica verdadeira.

Os principais trabalhos escritos de Hicks (1934; 1939) a respeito de equilíbrio geral se referem principalmente a uma avaliação da obra *Compêndios dos elementos de economia pura*, de Walras (1996), bem como seu livro *Value and capital* (HICKS, 1939), que nos capítulos de IV a VIII discute o problema do equilíbrio, enfatiza o problema da estabilidade do equilíbrio competitivo, criando alguns conceitos: estabilidade perfeita e estabilidade imperfeita para uma economia em mercados múltiplos. Realiza sua exposição por meio da linguagem geométrica bidimensional e, no apêndice, traduz todo o material descritivo em formalismo matemático.

Apesar de ter se graduado em Matemática, Hicks não usou os conhecimentos avançados para elaborar uma teoria estruturada a respeito do problema da estabilidade do equilíbrio geral, pois tal realização exigiria um conhecimento além daqueles encontrados em *Value and capital*. Contudo, Hicks detinha os conhecimentos básicos em teoria das matrizes, determinantes e o cálculo diferencial e integral de funções reais a diversas variáveis reais – o que facilitou sua leitura do livro de Walras para construir o modelo para mercados múltiplos. Porém, não usou o conhecimento de sistemas dinâmicos, pois acreditava em seu poder de argumentação descritiva em detrimento da análise matemática formal, conforme ficou patente em seu prefácio de *Value and capital* (1939) – necessário para avançar na elaboração de uma Teoria do Equilíbrio Geral, cujo problema da estabilidade teria obtido melhor avaliação, teórica e aplicada, conforme o fizeram Samuelson (1941; 1942; 1947), Lange (1944) e Metzler (1945), na década de 1940.

Como coroamento de sua dedicação e seu brilhantismo, e como legítimo representante da classe docente de primeira grandeza da Universidade de Oxford, reconhecido internacionalmente, em 1972, professor Hicks dividiu o Prêmio Nobel em Economia com outro renomado cientista, Kenneth Joseph Arrow, por suas contribuições pioneiras na Teoria do Equilíbrio Geral e à Teoria do Bem-Estar. Professor Hicks faleceu aos 85 anos, em 1989.

Referências

- FARIAS, T. A. A estabilidade do equilíbrio competitivo em mercados múltiplos: John Richard Hicks. *Brazilian Journal of Business Economics*, Brasília, v. 4, n. 2, p. 59-65, jul./dez. 2004.

HICKS, J. R. Walras. *Econometrica*, v. 2, p. 338-348, Oct. 1934.

_____. *Value and capital*. London: Oxford University Press, 1939.

LANGE, O. *Price flexibility and employment*. Bloomington: Principia Press, 1944.

MARSHALL, A. *Princípios de economia: tratado introdutório*. São Paulo: Abril Cultural, 1982. v. 1 e 2.

METZLER, L. The stability of multiple markets: the conditions of Hicks. *Econometrica*, v. 13, p. 277-292, Oct. 1945.

PARETO, V. *Manuel d'économie politique*. Genève: Droz, 1966.

_____. *Manual de economia política*. 3. ed. São Paulo: Nova Cultural, 1988. v. 1.

SAMUELSON, P. A. The stability of equilibrium: comparative statics and dynamics. *Econometrica*, v. 9, n. 2, p. 97-120, Apr. 1941.

_____. The stability of equilibrium: linear and non-linear systems. *Econometrica*, v. 10, n. 1, p. 1-25, Jan. 1942.

_____. *Foundations of economics analysis*. Massachusetts: Harvard University Press, 1947.

WALRAS, L. *Compêndios dos elementos de economia pura*. São Paulo: Nova Cultural, 1996.

WICKSELL, K. *Lições de economia política*. São Paulo: Nova Cultural, 1985.

Apêndice 1

Demonstração do Teorema 1 – p. 20

Assumimos que os preços p_2, p_3, \dots, p_s variam quando p_1 varia, mantendo p_{s+1}, \dots, p_n fixos. A escolha dos preços p_2, \dots, p_s como aqueles que variam não representa restrições, desde que, por uma remuneração de indicadores, qualquer conjunto arbitrário de mercadorias pode não ser coberto pelo argumento. O mesmo argumento vale quando da escolha de p_1 e E_1 como as variáveis consideradas na derivação das condições para a estabilidade perfeita hicksiana. Com efeito,

$$\frac{dp_{s+1}}{dp_1} = \dots = \frac{dp_n}{dp_1} = 0$$
$$\frac{dE_2}{dp_1} = \dots = \frac{dE_s}{dp_1} = 0$$

e escrevendo em notação matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{dE_s}{dp_1} \\ p \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \dots E_{1s} \\ E_{21} & E_{22} \dots E_{2s} \\ E_{s1} & E_{s2} \dots E_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{dp_2}{dp_1} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \frac{dp_s}{dp_1} \end{bmatrix} \quad [1]$$

e

$$\begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{31} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ E_{s1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} E_{22} & E_{23} \dots E_{2s} \\ E_{32} & E_{33} \dots E_{3s} \\ E_{s2} & E_{s3} \dots E_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dp_2}{dp_1} \\ \frac{dp_3}{dp_1} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \frac{dp_s}{dp_1} \end{bmatrix} \quad [2]$$

Resolvendo-se [2] para $\frac{dp_i}{dp_1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{dp_2}{dp_1} \\ \frac{dp_3}{dp_1} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \frac{dp_s}{dp_1} \end{bmatrix} = - \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{22} & \Delta_{23} \dots \Delta_{s2} \\ \Delta_{23} & \Delta_{33} \dots \Delta_{s3} \\ \Delta_{2s} & \Delta_{3s} \dots \Delta_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{21} \\ E_{31} \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ E_{s1} \end{bmatrix}$$

em que Δ é o determinante das matrizes $[E_{ir}]$ para $i \in \{2,3,\dots,s\}$ e $r \in \{2,3,\dots,s\}$ e Δ_{ir} é o cofator associado.

Em seguida, façamos:

$$\frac{dp_i}{dp_1} = -\frac{1}{\Delta} \sum_{r=2}^s \Delta_{ri} E_{ri}, \quad i \in \{2,3,\dots,s\}$$

À medida que:

$$\frac{dE_1}{dp_1} = \sum_{i=1}^s E_{1i} \frac{dp_i}{dp_1}$$

temos

$$\frac{dE_1}{dp_i} = E_{11} - \frac{1}{\Delta} \sum_{i=2}^s E_{1i} \sum_{r=2}^s E_{r1} \Delta_{ri}$$

Resolvendo [1], temos:

$$\Delta^* = E_{11} \Delta + \sum_{r=2}^s E_{1r} \Delta_{1r}^*$$

em que Δ^* é o determinante das matrizes $[E_{is}]$ para $i \in \{2,3,\dots,s\}$ e $r \in \{2,3,\dots,s\}$ e Δ_{ir}^* é o cofator associado.

Em particular, se expandirmos cada uma dos Δ^* ao longo da primeira coluna de cada determinante, temos:

$$\Delta^* = E_{11} \Delta - \sum_{r=2}^s E_{1r} \sum_{i=2}^s E_{ir}$$

Portanto,

$$\frac{dE_1}{dp_i} = \frac{\Delta^*}{\Delta} \text{ e } \frac{dB_1}{dp_i} < 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta^*}{\Delta} < 0$$

Os menores principais da matriz $[E_{is}]$ alternam o sinal:

- a) os menores principais de ordem par devem ser positivos;
- b) os menores principais de ordem ímpar devem ser negativos.

Este fato completa a prova.

Apêndice 2

Demonstração do Teorema 2 – p. 21

Suponhamos que

$$E_i(1, p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{j=1}^m [D_{ij}(1, p_1, p_2, \dots, p_n) - D_{ij}^0] - \sum_{k=1}^l y_{ik}(1, p_1, p_2, \dots, p_n).$$

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

e seja

$$E_{ir} = \frac{\partial E_i}{\partial p_r} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_r} - \sum_{k=1}^l \frac{\partial y_{ik}}{\partial p_r}$$

$$i \in [1, 2, \dots, n] \quad ; \quad r \in [1, 2, 3, \dots, n]$$

Neste ponto, fazendo uso da Equação de Slutsky,

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial p_r} = S_{ir}^j - \left[(D_{ij} - D_{ij}^0) - \sum_{k=1}^l s^{kj} \cdot y_{rk} \right] \cdot \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_r}$$

em que

$S_{ir}^j = \frac{\partial D_{ij}}{\partial p_r}$ representa o termo de substituição para j-ésimo consumidor com relação às mercadorias i e r ;

$\frac{\partial D_{ij}}{\partial I_j}$ representa a mudança em D_{ij} quando a renda muda, mantendo todos os preços constantes.

Assumimos que os efeitos-renda são simétricos com relação aos consumidores e representados por

$$\frac{\partial D_{ij}}{\partial I_j} = \frac{\partial D_{iq}}{\partial I_q} = \frac{\partial D_i}{\partial I} \quad \forall j, q \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad q \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Portanto, podemos escrever:

$$E_{ir} = \sum_{j=1}^m S_{ir}^j - \frac{\partial D_i}{\partial I} \cdot \sum_{j=1}^m \left[(D_{rj} - D_{rj}^o) - \sum_{k=1}^l s^{kj} \cdot y_{rk} \right] - \sum_{k=1}^l \frac{\partial y_{ik}}{\partial p_r}$$

Contudo, em equilíbrio, quando todos os lucros são distribuídos para os consumidores, representamos da seguinte maneira:

$$\sum_{j=1}^m \left[(D_{rj} - D_{rj}^o) - \sum_{k=1}^l s^{kj} \cdot y_{rk} \right] = 0 \quad \forall r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

Desse modo, para cada consumidor, a matriz de termos de substituição é simétrica e definida negativa, de posto n , o que significa que os menores principais de cada uma das matrizes individuais de substituição alternam em sinal.

Com efeito, a matriz agregada $\left[\sum_{j=1}^m S_{ir}^j \right]$ tem menores principais que alternam em sinal, também.

Do mesmo modo, em um máximo regular de lucros, a matriz $\left[-\frac{\partial y_{ir}}{\partial p_r} \right]$ é definida negativa; portanto, a matriz agregada $\left[-\sum_{k=1}^l \frac{\partial y_{ir}}{\partial p_r} \right]$ tem menores principais que alternam em sinal.

Concluimos que os menores principais da matriz $[E_{ir}]$, $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ alternam em sinal se os efeitos-renda são simétricos em relação aos consumidores.

E a prova está completa.