3

MODELO DE INSUMO--PRODUTO DINÂMICO: CONSTRUÇÃO, SOLUÇÃO E ESTABILIDADE

DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL: EVALUATION, SOLUTION AND STABILITY

Tácito Augusto Farias
Doutor em Ciências pela Esalq/USP, professor adjunto do DEE e membro do Núcleo de Pós-Graduação em Matemática (NPGMAT) da Universidade Federal de Sergipe (UFS)
Campus Universitário José Aloísio Campos – Nupec.
Av. Marechal Rondon, s/n – Jardim Rosa Elze – São Cristóvão – SE – CEP 49100-000
E-mail: tacitoaugusto@yahoo.com.br

Nehemias Anastácio Santos da Silva
Graduado em Ciências Econômicas pela Universidade Federal de Sergipe (UFS) e mestrando em Engenharia de Produção pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE/PPGEP).
Av. Marechal Rondon, s/n – Jardim Rosa Elze – São Cristóvão – SE – CEP 49100-000
E-mail: nehemiasufs@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo foi desenvolvido um modelo de insumo-produto dinâmico em tempo contínuo que mostra a evolução dos produtos de duas indústrias no decorrer do tempo. Realizamos a nossa tarefa, primeiro, construindo um modelo específico de dois setores abstratos para, em seguida, usarmos um exemplo numérico consistente. Ademais, apresentamos nosso modelo na versão de sistema de quantidades e de preços e aplicamos o Teorema de Estabilidade Dual para mostrar que, à medida que um dos sistemas for estável, o outro será estável (daí a dualidade).

Palavras-chave: Insumo-produto; Leontief; Modelo dinâmico.

Abstract

In this article have been developed a time continuous dynamic input-output model that shows the development of products, two industries over time. We did our paper, first building a abstract model of two specific sectors, then use a numerical example consistent. We also present our version of the model system of quantities and prices and apply the Stability Dual theorem showing that as one of the systems is stable, the other will be stable (hence occure the duality).

Keywords: Input-Output; Leontief; Dynamic model.

1 MODELO INSUMO-PRODUTO ESTÁTICO – CONSTRUÇÃO

Para melhor compreensão do modelo insumo-produto dinâmico de Leontief, é importante conhecer seu modelo estático. Para tanto, vamos desenvolver de modo sucinto considerações acerca do modelo estático (MILLER; BLAIR,1985).

A análise de equilíbrio geral toma forma operacional a partir da análise de insumo produto desenvolvida por Wassily Leontief (1981) em seu trabalho pioneiro *A economia do insumo-produto*. Uma característica fundamental referente à análise de insumo-produto estático consiste em enfatizar a interdependência da economia, utilizado pelos governos e pelas empresas para fins de previsão e planejamento global. Algumas hipóteses simplificadoras são introduzidas por Leontief no sentido de tornar operacionalizável a análise de equilíbrio geral contemplado em seu modelo de insumo-produto:

Hipótese 1: A variável de seu modelo é o vetor de quantidade de mercadorias produzidas.

Hipótese 2: A demanda de todas as mercadorias é dada.

Hipótese 3: Os insumos são utilizados em proporções fixas.

Hipótese 4: Retornos constantes de escala.

Hipótese 5: No longo prazo não haverá lucro econômico.

Ora, conhecendo os elementos sobre os quais será construído o modelo, é importante salientar que objetivos a análise de insumo-produto pretende alcançar. Simplificadamente:

a) Determinação da quantidade de bens que serão produzidos.
b) Determinação da quantidade de cada insumo e bem intermediário que devem ser empregados para alcançar uma dada produção.
c) Determinação do nível de equilíbrio de cada indústria.
d) Determinação dos índices de ligações setoriais.
e) Determinação dos multiplicadores agregados e desagregados.

Formalmente, a matemática do modelo de insumo-produto em sua versão simplificada, segundo Leontief (1981), é a seguinte: sejam X_1, X_2,....X_n a produção dos *n* setores da economia; X_{11}, X_{12},.....X_{in} as quantidades de X consumidos pelos *n* setores da economia; e Y_1, Y_2,.....Y_n as quantidades de X_1,.....X_n consumidos pelo setor autônomo. De fato, nossa economia possui *n* setores produtivos e um autônomo, promovendo uma economia nacional com (*n* + 1) setores. De posse dessas informações, construímos:

$$\begin{cases} X_1 = X_{11} + X_{12} + \ldots + X_{1n} + Y_1 \\ X_2 = X_{21} + X_{22} + \ldots + X_{2n} + Y_2 \\ \vdots \\ X_n = X_{n1} + X_{n2} + \ldots + X_{m} + Y_n \end{cases}$$

e definido $a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$ como coeficiente técnico (coeficiente de insumo-produto), façamos:

$$\begin{cases} X_1 - a_{11} X_1 + \ldots + a_{1n} X_n + Y_1 \\ X_2 = a_{21} X_1 + \ldots + a_{2n} X_n + Y_2 \\ \vdots \\ X_n - a_{n1} X_1 + \ldots + a_{nn} X_n + Y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 - a_{11} X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1n} X_n = Y_1 \\ X_2 - a_{21} X_1 - a_{22} X_2 - \ldots - a_{2n} X_n = Y_2 \\ \vdots \\ X_n - a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \ldots - a_{nn} X_n = Y_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - a_{12} X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1n} X_n = Y_1 \\ -a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 - \ldots - a_{2n} X_n = Y_2 \\ \vdots \\ -a_{n1} X_1 - a_{n2} X_2 - \ldots + (1 - a_{nn}) X_n = Y_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1-a_{11} - a_{12} & \ldots - a_{1n} \\ -a_{21}(1-a_{22}) & \ldots - a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{n1} \quad -a_{n2} & \cdots(1-a_{nn}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

Matriz unitária	Matriz dos coeficientes. Técnicos diretos (matriz tecnológica)	Vetor das quantidades de produção	Vetor de demanda final

$$(I-A).\ X = Y \therefore (I-A)^{-1}.(I-A)X = (I-A)^{-1}X$$

$$X = [I-A]^{-1}Y$$

onde $[I - A]^{-1}$ é denominado *matriz inversa de Leontief*, cujos elementos dão os coeficientes técnicos diretos e indiretos. Qualquer alteração na demanda final de um ou mais setores poderá ser calculada usando o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \vdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \vdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} X_1 = \alpha_{11}Y_1 + \ldots + \alpha_{1n}Y_n \\ \vdots \\ X_n = \alpha_{n1}Y_1 + \ldots + \alpha nnY_n \end{cases}$$

Significa dizer que a produção final de cada setor depende de suas respectivas demandas finais. Ademais, o vetor de preços apresentará os preços relativos unitários dos produtos de cada setor.

1.1 Os coeficientes técnicos de produção

Antes de proceder a um quadro numérico sobre o modelo insumo-produto estático, façamos algumas considerações sobre coeficientes técnicos diretos e indiretos (YAN, 1975). Uma das hipóteses básicas do modelo estático é que os coeficientes diretos e indiretos de produção são fixos, contudo esses coeficientes podem sofrer mudanças ao longo do tempo resultantes de modificações em certas variáveis econômicas e tecnológicas, tais como:

a) o aparecimento de novas indústrias, ou seja, indústrias com uma composição de insumo-produto diferente das existentes;
b) a alteração na condição de produto e, consequentemente de insumos, de indústrias já estabelecidas;
c) a substituição de insumos como resultados de inovações tecnológicas, como a troca de matérias-primas naturais por sintéticos;
d) a substituição de insumos importados (que estão fora da matriz de fluxos interindustriais) por insumos nacionais, ou vice-versa;
e) a alteração nos preços relativos, fazendo que, em termos monetários, aumente a participação de alguns insumos e decresça a participação de outros na composição dos diferentes bens e serviços.

Para países que já atingiram elevado grau de industrialização, as mudanças nos coeficientes técnicos de produção tendem a ser mais lentas do que nos países que possuem baixo grau de industrialização (BLITZER; CLARK; TAYLOR, 1975). Por conseguinte, nos países de baixo grau de industrialização, as mudanças nos preços relativos resultantes do próprio processo de desenvolvimento são mais profundas e perceptíveis; enquanto, nos países de elevado grau de industrialização, o aparecimento de novas indústrias está na dependência exclusiva do avanço tecnológico. Já nos países de baixo grau de industrialização, o aparecimento de novas indústrias é consequência da industrialização (MYIAZAWA, 1976).

1.2 Planejamento global, previsão, descrição e análise da estrutura econômica

O modelo de insumo-produto pode ser utilizado para a descrição e análise da estrutura de uma economia, bem como para a previsão e planejamento econômico. O modelo de insumo-produto que pode ser utilizado para a descrição e análise da estrutura econômica mostra a interdependência entre os diferentes setores da atividade, a contribuição de cada um desses na produção de bens e serviços dirigidos à demanda final, as necessidades de importação tanto de insumo como de produtos dirigidos à demanda final e o valor adicionado de cada setor (SCARF; SHOVEN, 1984).

A principal diferença entre o emprego do modelo de insumo-produto para previsão e para fins de planejamento está no fato de que, no primeiro caso, as alterações iniciais são previstas ou estimadas, enquanto, no segundo, na planificação, são planejadas. Na previsão é mais comum partir das modificações iniciais na produção total – mudanças essas que são estimadas à parte – para então, utilizando o modelo, determinar as mudanças nas outras variáveis, enquanto no planejamento é usual tomar como ponto de partida as alterações na demanda final, que constituem os objetivos previstos do plano (DEVIS; MELO; SHERMAN, 1982). A seguir a Tabela 1 exemplifica uma matriz de insumo-produto hipotética.

Tabela 1

Quadro-exemplo de uma matriz de insumo-produto hipotética

Insumos	Produtos	Setores de processamento				Setores de demanda final					
		Primário	Secundário	Terciário	Subtotal	Exportação	Consumo	Investimento bruto	Variação de estoque	Subtotal	Total
Setores de processamento	1. Primário	15	25	15	55	15	70	8	1	94	149
	2. Secundário	18	35	30	83	6	80	22	2	110	193
	3. Terciário	37	40	105	182	3	134	11	1	149	331
	4. Subtotal	70	100	150	320	24	284	41	4	353	
Setores de pagamento	5. Importação	1	5	3	9	-	5	10	-	15	
	6. Valor adicionado	65	71	152	287	-	20	-	-	20	
	7. Impostos indiretos	9	11	18	39	-	-	-	-	-	
	8. Subsídios	-1	-1	-1	-3	-	-	-	-	-	
	9. Depreciação de capital	5	7	9	18	-	-	-	-	-	
	10. Subtotal	79	93	181		-	25	20		35	
	11. TOTAL	149	193	331							

Fonte: Elaborada pelos autores.

2 MODELO DE INSUMO-PRODUTO DINÂMICO

O modelo de insumo-produto dinâmico do fluxo de investimento é considerável endógeno. A endogenização do investimento é feita mediante a ligação das exigências de capital de cada setor ao produto daquele setor por intermédio de coeficientes técnicos $b_{ir} \geq 0$; cada um deles representa o estoque de capital do i-ésimo, bem que a i-ésima indústria deve ter em mãos para cada unidade de seu produto. Para alicerçarmos nossa discussão, vamos apresentar as hipóteses básicas do modelo insumo-produto dinâmico:

Hipótese 1: Demandas de investimentos por origem estão relacionadas à demanda de investimento simples.

Hipótese 2: Demandas de investimento por destino são determinadas por uma relação de acelerador simples.

Em seguida, descrevemos o modelo completo de insumo-produto dinâmico. Seja S_{ik} o estoque de capital do i-ésimo produto possuído pela i-ésima indústria e seja X_k o produto total de K-ésima indústria. Ou seja,

$$S_{ik} = b_{ik} X_k \qquad \begin{cases} i \in \{1,2,\ldots m\} \\ k \in \{1,2,\ldots m\} \end{cases} \tag{1}$$

de modo que, diferenciando ambos os membros com relação ao tempo, temos:

$$S'_{ik} = b_{ik} X_k \tag{2}$$

A equação 2 é uma versão contínua do princípio de aceleração, desde que este ligue a variação no estoque de capital (investimento) à variação no produto, mediante os coeficientes de capital apropriados. A partir de (2), as equações de equilíbrio do modelo estatístico devem ser modificadas:

$$X_t = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} X_k + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} X'_k + Y_i, \ \{i \in \{1,2,\ldots m\}\} \tag{3}$$

Verificamos que o lado esquerdo de c representa o produto total da i-ésima indústria, que em equilíbrio deve igualar a quantidade demandada. A demanda na economia é constituída por três componentes:

a) a quantidade do i-ésimo produto utilizado como um insumo por todas as indústrias:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} X_k$$

b) a quantidade do i-ésimo produto demandado como investimento por todas as indústrias:

$$\sum_{k=1}^{m} b_{ik} X'_k$$

c) a quantidade do i-ésimo produto utilizado para satisfazer a demanda final:

$$Y_i$$

Comparando os itens a, b e c do modelo de insumo-produto dinâmico com o modelo de insumo-produto estático, verificamos que a novidade é o surgimento de c. Nesse produto podemos distinguir, entre modelo aberto (no qual as demandas finais são exógenas) e modelo fechado (no qual as demandas finais são endógenas). O resultado é que o "produto" desse setor é trabalhado e seus insumos são os vários bens de consumo, duráveis e não duráveis. Ao introduzir essa modificação nas equações (3), teremos:

$$Y_i$$

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} X'_k, \quad \{i \in \{1, 2, \ldots n\}$$

onde: $a_{in} X_n + b_{in} X'_n$

Notamos que o fechamento do modelo implica que, no n-ésimo setor, existem coeficientes fixos a_{in}, b_{in}, e este, por sua vez, significa que existe proporcionalidade estrita entre a quantidade de produtos que as famílias compram e a quantidade de trabalho que eles produzem.

2.1 Modelo simplificado: sistema dinâmico de quantidades

Para facilitar nossa compreensão da operacionalização do modelo insumo-produto dinâmico, vamos reduzi-lo a uma economia com duas indústrias. Desse modelo, podemos ilustrar de imediato as propriedades vistas até aqui. Se utilizarmos a equação (3) com demanda final, teremos:

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + b_{11}X_1^{'} + b_{12}X_2^{'} + Y_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + b_{21}X_2^{'} + b_{22}X_2^{'} + Y_2 \end{cases} \quad (4')$$

2.1.1 Modelo simplificado: solução homogênea

De imediato verificamos que, para resolver o modelo, precisamos conhecer a forma dos Ys, ou seja, das demandas finais de cada setor. Portanto, a solução envolve diretamente resolver a parte homogênea do modelo, para o qual a forma dos Ys é irrelevante. Nossa tarefa fica estabelecida da seguinte forma:

1. Primeiro vamos resolver a parte homogênea.
2. Segundo, a parte não homogênea.
3. Juntar as duas partes e obter a solução final.

Procedamos à primeira parte. Seja o sistema homogêneo

$$\begin{cases} -b_{11}X_1^{'} + (1 - a_{11})X_1 - b_{12}X_2^{'} - a_{12}X_2 = 0 \\ -b_{21}X_1^{'} - a_{21}X_1 - b_{22}X_2^{'} + (1 - a_{22})X_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

de primeira ordem, estabelecido em forma não normal, desde que as derivadas de ambas as funções apareçam. Calculamos a equação característica como segue:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\lambda+(1-a_{11}) & -b_{12}\lambda-a_{12} \\ -b_{21}\lambda-a_{21} & -b_{22}\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{6}$$

$$(b_{22}b_{11}-b_{12}b_{21})\lambda^2-[(1-a_{11})b_{22}+(1-a_{22})b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{21}b_{12}]\lambda$$
$$+[(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{21}a_{12}]=0$$

O descriminante expandido da equação do 2º grau em λ é:

$$\Delta = [(1\text{-}a_{11})b_{22} - (1-a_{22})\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} - a_{21}\, b_{12}]^2 +$$
$$+ 4\, [(1-a_{11})b_{22}\, a_{21}\, b_{12} + (1-a_{22})\, b_{11}\, a_{12}\, b_{21} + b_{22}\, b_{11} a_{21}\, a_{12}$$
$$+ b_{12}\, b_{21}(1-a_{11})(1-a_{22})] \tag{7}$$

Lembramos que, para que um sistema seja viável, $(1-a_{11})$, $(1-a_{22})$ e $[(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}\, a_{21}]$ devem ser todos positivos. Nesse caso, é suficiente que $(1-a_{11})$ e $(1-a_{22})$ sejam positivos para garantia de viabilidade. A partir dessa constatação, podemos afirmar que ao menos uma das raízes da equação é positiva. Ao realizarmos com a devida atenção o exame de equação (6) tendo em vista os sinais de seus coeficientes, temos:

a) o coeficiente em λ^2 pode assumir qualquer sinal.

b) o coeficiente em λ é negativo, pela condição de viabilidade.

c) o termo constante é positivo, pela condição de viabilidade.

Assim, independentemente do sinal do coeficiente de λ^2, existe certamente uma variação na sequência dos sinais dos coeficientes, e isso significa uma raiz positiva ($\Delta > 0$). Com efeito, temos três casos para analisar:

Caso 1: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} < 0$

Usando essa informação em (6), verificamos que a sucessão de sinais é - - +, e assim existem duas raízes: uma negativa e uma positiva.

Caso 2: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} = 0$

Usando essa informação em (6), verificamos que reduzimos a equação característica a

$$-\left[(1-a_{11})b_{22} + (1-a_{22})b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{21}b_{12}\right]\lambda$$
$$+\left[(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{21}a_{12}\right] = 0$$

que é uma equação característica de 1º grau em λ, cuja única raiz é necessariamente positiva.

Caso 3: $b_{22}b_{11} - b_{12}b_{21} > 0$

Usando essa informação em (6), verificamos que a sucessão de sinais é + - +., e assim concluímos que existem duas raízes positivas. Abstraindo para visualização geométrica (plano de fase), em geral o movimento realizado pela parte homogênea do sistema é divergente, significando que, para *t* suficientemente grande, o termo contendo raiz positiva maior dominará de modo que todas as variáveis tenderão a crescer na mesma taxa proporcional dada pela raiz dominante. A solução de (5) é dada por

$$X_1(E) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t}$$

onde λ_1, λ_2 são raízes de (6), e os coeficientes α_1 e α_2 correspondem a

$$\alpha_1 = \frac{1 - a_{11} - b_{11}\lambda_1}{a_{12} + b_{12}\lambda_1} \qquad \alpha_2 = \frac{1 - a_{11} - b_{11}\lambda_2}{a_{12} + b_{12}\lambda_2}$$

2.1.2 Modelo simplificado: solução geral

Nosso propósito nesta seção é determinar a solução particular do sistema não homogêneo (4). Para isso, vamos examinar dois casos: demandas finais constantes e demandas finais exponencialmente crescentes.

2.1.2.1 Demandas finais constantes

Sejam $Y_1 = c_1$, $y_2 = c_2$, onde c_1 e c_2 são duas constantes positivas. Como uma solução particular tentamos $\overline{X}_1 = B_1$ e $\overline{X}_2 = B_2$, onde B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Fazendo a substituição dessas constantes em (4), temos:

$$\begin{aligned} B_1 &= a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + b_{11}.0 + b_{12}.0 + c_1 \\ B_1 &= a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + 0 + 0 + c_1 \\ B_1 - a_{11}B_1 &= a_{12}B_2 + c_1 \\ (1-a_{11})B_1 - a_{12}B_2 &= c_1 \end{aligned} \tag{8}$$

e

$$\begin{aligned} B_2 &= a_{21}B + a_{22}B_2 + b_{21}.0 + b_{22}.0 + c_2 \\ B_2 &= a_{21}B + a_{22}B_2 + 0 + 0 + c_2 \\ B_2 - a_{22}B_2 &= a_{21}B_1 + c_2 \\ (1-a_{22})B_2 - a_{21}B_1 &= c_2 \end{aligned} \tag{9}$$

Resolvendo (8) e (9) para B_1 e B_2 e utilizando a regra de Cramer:

$$\begin{cases} (1-a_{11})B_1 - a_{12}B_2 = c_1 \\ -a_{21}B_1 + (1-a_{22})B_2 = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (1-a_{11}) & (-a_{12}) \\ (-a_{21}) & (1-a_{22}) \end{vmatrix} = (1-a_{11})(1-a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \neq 0$$

Ou seja, $\Delta \neq 0$ corresponde à condição de compatibilidade do sistema, o que, do ponto de vista econômico, significa condição de viabilidade econômica.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & (-a_{12}) \\ c_2 & (1-a_{22}) \end{vmatrix} \therefore \Delta_t = c_t(1-a_{22}) + c_2a_{12}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1-a_{11} & (-a_{12}) \\ -a_2 & (1-a_{22}) \end{vmatrix} \therefore \Delta_2 = (1-a_{11})c_2 + c_1 a_{21}$$

Façamos:

$$B_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \therefore B_1 = \frac{c_1(1-a_{22}) + c_2 a_{12}}{(1-c_{11})(1-a_{22}) + (a_{12})(a_{21})}$$

$$B_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \therefore B_2 = \frac{(1-a_{11})c_2 + c_1 a_{21}}{(1-a_{11})(1-a_{22}) + (a_{12})(a_{21})} \qquad (10)$$

Conjugando as soluções homogênea e particular do sistema não homogêneo, obtemos a solução geral:

$$X_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{?_2 t} + B_1$$

$$X_2(t) = A_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + B_2 \qquad (11)$$

Façamos $X_1(0)$ e $X_2(0)$ em (11) para determinarmos A_1 e A_2 . Logo:

$$\begin{cases} X_1(0) = A_1 l^{\lambda_1 - 0} + A_2 l^{\lambda_2 - 0} + B_1 \\ X_2(0) = A_1 \alpha_1 l^{\lambda_1 - 0} + A_2 \alpha_2 l^{\lambda_2 - 0} + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1(0) = A_1 + A_2 + B_1 \\ X_2(0) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + B_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = X_1(0) - B_1 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = X_2(0) - B_2 \end{cases}$$

Utilizando a regra de Cramer para resolver o sistema, temos:

$$A_1 = \frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2-(0)-B_2]}{\alpha_2-\alpha_1}$$
$$A_2 = \frac{[X_2(0)-B_2]-[X_1(0)-B_1].\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} \qquad (12)$$

onde:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} \therefore \Delta = \alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$$

é a condição de compatibilidade do sistema. Enfim, substituindo (12) em (11), obtemos:

$$X_1(t) = \frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2(0)-B_2]}{\alpha_2-\alpha_1} e^{\lambda_1 t} + \left\{\frac{[X_2(0)-B_2]-[X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right\} e^{\lambda_2 t} + B_1$$
$$X_1(t) = \frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2(0)-B_2]}{\alpha_2-\alpha_1} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \left\{\frac{[X_2(0)-B_2]-[X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\right\} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + B_1 \qquad (13)$$

que é a solução geral do sistema não homogênea na forma modificada.

2.1.2.2 Demandas finais exponenciais crescentes

Sejam $Y_1 = d_1 e^{ut}$, $Y_2 = d_2 e^{ut}$, onde d_1, d_2 e u são constantes positivas dadas, façamos como no item anterior, $\overline{X}_1(t) = B_1 e^{ut}$, $\overline{X}_2(t) = B_2 e^{ut}$, onde B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Fazendo a substituição desses valores em (4), temos:

$$\begin{cases} B_1 e^{ut} = a_{11} B_1 e^{ut} + a_{12} B_2 e^{ut} + b_{11} u B_1 e^{ut} + b_{12} u B_2 e^{ut} + d_1 e^{ut} \\ B_2 e^{ut} = a_{21} B_1 e^{ut} + a_{22} B_2 e^{ut} + b_{21} u B_1 e^{ut} + b_{22} u B_2 e^{ut} + d_2 e^{ut} \end{cases}$$
$$\begin{cases} e^{ut}\left[(1 - a_{11} - ub_{11})B_1 - (a_{12} + b_{12}u)B_2 - d_1\right] = 0 \\ e^{ut}\left[-(a_{21} + b_{21}u)B_1 + (1 - a_{22} - ub_{22})B_2 - d_2\right] = 0 \end{cases} \tag{14}$$

Sabemos que: $a.b = 0$ se $a = 0$ ou $b = 0$. Aplicando isso em (15), temos:

$$\begin{cases} (1 - a_{11} - ub_{11})B - (a_{12} + b_{12}u)B_2 = d_1 \\ -(a_{21} + b_{21}u)B_1 + (1 - a_{22} - ub_{22})B_2 = d_2 \end{cases} \tag{15}$$

Depois de resolver o sistema (15), aplica-se a regra de Cramer:

$$B_1 = \frac{(1 - a_{22} - ub_{22})d_1 + (a_{12} + b_{12}u)d_2}{(1 - a_{11} - ub_{11})(1 - a_{22} - ub_{22}) - (a_{12} + b_{12}u)(a_{21} + b_{21}u)}$$
$$B_2 = \frac{(1 - a_{11} - ub_{11})d_2 + (a_{12} + b_{12}u)d_2}{(1 - a_{11} - ub_{11})(1 - a_{22} - ub_{22}) - (a_{12} + b_{12}u)(a_{21} + b_{21}u)} \tag{16}$$

Conjugando as soluções homogêneas e a particular do sistema não homogêneo, obtemos a solução geral:

$$\begin{cases} X_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 - t} + A_2 e^{\lambda_2 - t} + B_1 e^{ut} \\ X_2(t) = A_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 - t} + A_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 - t} + B_2 e^{ut} \end{cases} \tag{17}$$

que pode ser escrita de outra forma:

$$X_1(t) = A_1 e^{\lambda_1 - t} + A_2 e^{\lambda_2 - t} + \left[\frac{(1 - a_{22} - ub_{22})d_1 + (a_{12} + b_{12}u)d_2}{(1 - a_{11} - ub_{11})(1 - a_{22} - ub_{22}) - (a_{12} + b_{12}u)(a_{21} + b_{21}u)}\right].e^{ut} \tag{18}$$

$$X_2(t) = A_1\alpha_1 e^{\lambda_1 - t} + A_2\alpha_2 e^{\lambda_2 - t} + \left[\frac{(1-a_{11}-ub_{11})d_2 + (a_{21}+b_{21}u)d_1}{(1-a_{11}-ub_{11})(1-a_{22}-ub_{22})-(a_{12}+b_{12}u)(a_{21}+b_{21}u)}\right].e^{ut} \tag{19}$$

Façamos $X_1(0)$ e $X_2(0)$ em (12) para determinarmos A_1 e A_2. Logo:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = X_1(0) - B_1 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 X_2 = X_2(0) - B_2 \end{cases} \tag{20}$$

Resolvendo (20) pela regra de Cramer para A_1 e A_2:

$$A_1 = \frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2(0)-B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1}$$
$$A_2 = \frac{[X_2(0)-B_2] - [X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \tag{21}$$

Se substituirmos (21) em (19), obteremos uma expressão para a solução geral:

$$X_1(t) = \left\{\frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2(0)-B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1}\right\} e^{\lambda_1 t} + \left\{\frac{[X_2(0)-B_2] - [X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right\} e^{\lambda_2 t} + B_1.e^{ut}$$
$$X_2(t) = \left\{\frac{[X_1(0)-B_1]\alpha_2 - [X_2(0)-B_2]}{\alpha_2 - \alpha_1}\right\} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \left\{\frac{[X_2(0)-B_2] - [X_1(0)-B_1]\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right\} \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + B_1.e^{ut} \tag{22}$$

2.2 Modelo simplificado: sistema dinâmico de preços

Vamos considerar agora a introdução do sistema dinâmico de preços em nossa economia hipotética simplificada de dois setores. As equações de preços que vamos considerar são as seguintes (SAMUELSON; DORFMAN; SOLOW, 1958):

$$\begin{cases} p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2) + r(b_{11}p_1 + b_{21}p_2) - (b_{11}p'_1 + b_{21}p'_2) \\ p_2 = (a_{21}p_1 + a_{22}p_2) + r(b_{12}p_1 + b_{22}p_2) - b_{12}p'_1 + b_{22}p'_2) \end{cases} \tag{23}$$

onde r é a taxa de juros. Reescrevendo (23):

$$\begin{cases} b_{11}p'_1 + (1 - a_{11} - rb_{11})p_1 + b_{21}p'_2 - (a_{21} + rb_{21})p_2 = 0 \\ b_{12}p'_1 - (a_{12} + rb_{12})p_1 + b_{22}p'_2 + (1 - a_{22} - rb_{22})p_2 = 0 \end{cases} \tag{24}$$

A equação característica de (24) é:

$$\begin{vmatrix} b_{11}p + 1 - a_{11} - rb_{11} & b_{21}p - a_{21} - rb_{21} \\ b_{12}p - a_{12} - rb_{12} & b_{22}p + 1 - a_{22} - rb_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

que pode ser reescrita assim:

$$\begin{vmatrix} -b_{11}\lambda + (1 - a_{11}) & -b_{21}\lambda - a_{21} \\ -b_{12}\lambda - a_{12} & -b_{22}\lambda + (1 - a_{22}) \end{vmatrix} = 0$$

onde $\lambda = r - p$. A solução de (24) é:

$$\begin{cases} p_1(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} \\ p_2(t) = B_2 \alpha_1 e^{p_1 t} + B_2 \alpha_2 e^{p_2 t} \end{cases} \tag{26}$$

Para evitar que façamos todos os cálculos novamente, teçamos alguma consideração: desde que $p = r - \lambda$, as raízes características do sistema de preços podem ser obtidas subtraindo de r as raízes características do sistemas de quantidades.

2.3 Modelo simplificado: estabilidade

Com essa atitude, deixamos espaço para fazer considerações de natureza relevante no tocante à estabilidade do sistema. Desse modo, afirmamos que o sistema é relativamente estável se, quando $t \rightarrow \infty$, todos os produtos tendem a crescer à taxa λ. Formalmente,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_1^{'}(t)}{X_1(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\lambda_1 A_1 l^{\lambda_2 t} + \lambda_2 A_2 l^{\lambda_2 t}}{A_1 l^{\lambda_1 t} + A_2 l^{\lambda_{21} t}}$$

$$= \lambda_1 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{A_2}{A_1})l^{(\lambda_2-\lambda_1)}} + \lambda_2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1+(\frac{A_1}{A_2})l^{(\lambda_2-\lambda_3)t}}$$

$$= \lambda_1 . 1 + \lambda_2 . 0$$

$$= \lambda_1$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_2^{'}(t)}{X_2} = \frac{\lambda_1 A_1 \alpha_1 l^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 \alpha_2 l^{\lambda_2 t}}{A_1 \alpha_1 l^{\lambda_1 t} + A_2 \alpha_2 l^{\lambda_2 t}}$$

$$= \lambda_1$$

Nosso sistema atende ao Teorema da Estabilidade Dual: se o sistema produção é relativamente estável (como mostrado anteriormente), o sistema preço é relativamente instável.

2.4 Aplicação

Após a resolução dos sistema proposto, vamos procurar ilustrá-lo numericamente. Vamos realizar nossa tarefa da seguinte maneira:

1. utilizamos a equação diferencial em sua forma homogênea e calculamos sua solução;

2. utilizamos a equação diferencial em sua forma não homogênea e calculamos a sua solução;

3. calculamos a solução final.

Façamos:

$$\begin{cases} 0,9X_1 - 2X_1' - 0,9X_2 = 90 \\ -3X_1' - 0,4X_1 + 0,8X_2 = 80 \end{cases} \qquad (*)$$

O sistema de equações diferenciais não homogêneas representa nossa economia simplificada de dois setores. Resolvemos o sistema determinando sua equação característica:

$$\begin{vmatrix} 0,9 & -2\lambda - 0,9 \\ -3\lambda - 0,4 & 0,8 \end{vmatrix} = 0 \therefore -6\lambda^2 - 3,5\lambda + 0,36 = 0$$

cujas raízes são λ_1 = -0,6725 e λ_2 = 0,08916. Os coeficientes são:

$$\alpha_1 = \frac{0,9}{0,9 - 2.0,6725} \therefore \alpha_1 = -2,0225$$

$$\alpha_1 = \frac{0,9}{0,9 - 2.0,08916} \therefore \alpha_2 = 0,8346$$

A solução homogênea do sistema proposto é:

$$X_1(t) = A_{1.}e^{-0,6725t} + A_2.e^{+0,08916t}$$
$$X_2(t) = A_1.(-2,0225)e^{-0,6725t} + A_2.(0,8346)e^{+0,08916t}$$

Como solução particular do sistema proposto, tentamos $\overline{X}_1 = B$ e $\overline{X}_2 = B_2$, onde novamente B_1 e B_2 são constantes indeterminadas. Portanto:

$$\begin{cases} 0,9B_1 - 0,9B_2 = 90 \\ -0,4B_1 + 0,8B_2 = 80 \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer para solução do sistema, temos:

$$B_1 = 400 \text{ e } B_2 = 300$$

A solução do sistema proposto é a conjugação da solução homogênea com a solução particular

$$\begin{aligned} X_1(t) &= A_1 e^{-0,6725t} + A_2 e^{+0,08916r} + 400 \\ X_2(t) &= A_1(-2,20225)e^{-0,6725t} + A_2(0,8346)e^{+0,08916r} + 300 \end{aligned} \qquad (**)$$

se quisermos determinar A_1 e A_2 procedemos tomando $t = 0$, resultando

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + 400 = 500 \\ -2,00225A_1 + 0,8346A_2 + 300 = 400 \end{cases}$$

fornecendo $A_1 = 5,789$ e $A_2 = 105,789$. Substituindo A_1 e A_2 em (**), obtemos a forma final da solução do sistema dinâmico não homogêneo:

$$\begin{cases} X_1(t) = (-5,789)e^{-0,6725t} + (105,789)e^{+0,08916t} + 400 \\ X_2(t) = (-0,5789)(-2,0225)e^{-0,6725t} + (105,789)(0,8346)e^{+0,08916t} + 300 \end{cases} \qquad (***)$$

As equações-soluções (***) mostram a evolução do produto de cada setor (indústria) de economia no decorrer do tempo.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foi desenvolvido um modelo de insumo-produto dinâmico na versão em tempo contínuo que mostra a evolução dos produtos de duas indústrias no decorrer do tempo. Realizamos a nossa tarefa, primeiro, construindo um modelo específico de dois setores abstratos para, em seguida, usarmos um exemplo numérico consistente. Ademais, apresentamos nosso modelo na versão de sistema de quantidades e de preços e aplicamos o Teorema de Estabilidade Dual para mostrar que, à medida que um dos sistemas for estável, o outro será estável (daí a dualidade).

Outra forma de realizar o trabalho aqui apresentado consiste em usar uma versão de tempo discreto que resultaria na solução de equações com base na diferença e no uso de ideias semelhantes quanto à execução do problema de estabilidade do sistema.

Referências

ALLEN, R. G. D. *Mathematical economics*. New York: MacMillan Company, 1957. Chap. 5, 10, 11, 12, 13, 14.

BLITZER, C. R; CLARK, P., B.; TAYLOR, L. *Economy-wide models and development planning*. London: Oxford University Press. 1975. p. 1-12, 33-109.

BUSHAW, D. W.; CLOWER, R. W. *Introduction to Mathematical Economics*. Illinois: Richad D. Irwin, 1957. Chap. 3, 4, 6, 11, 12.

DERVIS, K.; MELO, J. de.; SHERMAN, R. *General equilibrium models for development policy*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. p. 17-61.

INTRILIGATOR, M. D. *Mathematical optimization and economic theory*. New Jersey: Prentice-Hall, 1971. Chap. 9, Appendix B.

LANCASTER, K. *Mathematical economics*. New York: MacMillan Company, 1968. Chap. 6, 9, 10, 12. Part IV. R. 2, R. 3, R. 5, R. 6, R. 7, R. 10.

LEONTIEF, W. *A economia do insumo-produto*. São Paulo: Abril Cultural, 1981.

_______. *Input-Output Economics*. New York: Oxford University Press, 1985. p. 19-40, 294-320.

MILLER, R.; BLAIR, P. O. *Input-output analysis; Foundations and extensions*. New Jersey: Prentice Hall, 1985.

MIYAZAWA, K. *Input-output anaslysis and the structure of income distribuition.* Berlin: Springer-Verlag, 1976. p. 1-21.

PASINETT, L. L. *Lectures on the theory of production*. New York: Columbia University, 1977. p. 1-34, 35-47; 48-53; 54-70; 191-225.

ROSE, A. Z. et al. (Ed.) *Frontiers of input-output analysis*. New York: Oxford University Press, 1989. p. 3-11, 37-50, 193-205, 209-221.

SAMUELSON, P. A.; DORFMAN, R.; SOLOW. R. *Linear programming economics analysis*. New York: McGraw-Hill Ltd., 1958. Chap. 9, 10, 11, Appendix B.

SCARF, H. E.; SHOVEN, J. B. *Applied general equilibrium analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

WEINTRAUB, E. R. *General Equilibrium Analysis:* Studies in Apraisal. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1993.

YAN, C. S. *Introdução à economia de insumo-produto*. São Paulo: Difel, Forum, 1975.